Smarandache

未解决的问题及其新进展

刘燕妮 李 玲 刘宝利 著

High American Press
2008

Smarandache未解决的问题及其新进展

刘燕妮

西北大学数学系

李　玲

陕西工业职业技术学院基础部

刘宝利

西安航空职业技术学院基础部

High American Press

2008

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

Books on Demand
ProQuest Information & Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road
P.O. Box 1346, Ann Arbor
MI 48106-1346, USA
Tel.: 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/basic

Peer Reviewers:
Wenpeng Zhang, Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, Shannxi , P.R.China.
Wenguang Zhai, Department of Mathematics, Shangdong Teachers' University, Jinan, Shandong , P.R.China.
Guodong Liu, Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou,Guangdong, P.R.China.

Many books can be downloaded from the following **Digital Library of Science**:
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

ISBN: 978-1-59973-063-9

Standard Address Number: 297-5092
Printed in the United States of America

前　言

数论, 是研究数的规律, 特别是研究整数性质的数学分支. 数论形成一门独立的学科后, 随着其他数学分支的发展, 研究数论的方法也在不断的发展, 现代数论已经深入到数学的许多分支, 在我国, 数论也是发展最早的数学分支之一. 古希腊人和中国人等很早就有了数论知识.

数论在数学中的地位是独特的, 高斯曾经说过"数学是科学的皇后, 数论是数学中的皇冠". 因此, 数学家都喜欢把数论中一些悬而未决的疑难, 叫做"皇冠上的明珠", 以鼓励人们去"摘取", 下面简要列出几颗"明珠": 费尔马大定理、孪生素数问题、歌德巴赫猜想、圆内整点问题、完全数问题···

函数的均值估计是数论研究的重要课题之一, 是研究各种数论问题不可缺少的工具. 许多著名的数论难题都与这些均值密切相关, 因而在这一领域取得任何实质性进展都必将对数论发展起到重要的推动作用. 在《只有问题，没有解答》一书中, 美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache 教授提出了105个尚未解决的数论问题, 其中许多问题具有一定的研究价值, 对这些问题进行研究并给予一定程度上的解决, 是具有一定理论意义的.

本书是作者在西北大学攻读学位期间, 根据导师张文鹏教授的建议, 将目前中国学者关于Smarandache问题的部分研究成果, 以及提出的未解决的新问题汇编成册, 其主要目的在于向读者介绍关于Smarandache问题的一些最新的研究成果, 并提出了关于这些函数的一些新的问题, 有兴趣的读者可以对这些问题进行研究, 从而开拓读者的视野, 引导和激发读者对这些领域的研究兴趣.

在本书的编写过程中, 张沛师妹为本书的编写及打印付出了艰苦的努力, 在此深表感谢! 同时, 对我们的导师张文鹏教授的热情鼓励, 详细地审阅全书并提出许多宝贵意见致以深深的谢意!

最后, 值得说明的是在本书最终校对之时, 我国四川省汶川县发生了特大地震灾害, 在此我们对地震中遇难的同胞表示深切的哀悼!

编者

2008年5月

目录

第一章 Smarandache函数

当自变量n在某个整数集合中取值时, 因变量y取复数值的函数$y = f(n)$称为数论函数或算术函数. 由于许多数论或组合数学中的问题均可化为一些数论函数来讨论, 所以数论函数是一类非常重要的函数, 是数论中的一个重要研究课题, 是研究各种数论问题中不可缺少的工具. 一些古老的数论问题被解决, 但是更多的新问题会出现, 正是对这些问题的不断研究才促进了数论及现代数学的长足发展. 本章主要介绍了Smarandache函数的研究现状, 并提出了一些有关Smarandache函数的新问题.

1.1 引言

首先, 我们给出几个相关函数的定义

定义1.1 对任意正整数n, 著名的Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m!$, 即$S(n) = \min\{m:\ n|m!,\ m \in N\}$.

定义1.2 对任意正整数n, Dirichlet除数函数$d(n)$表示n的正因子个数, 即

$$d(n) = \sum_{d|n} 1.$$

定义1.3 函数$Z(n)$ 定义为最小的正整数k使得$n|\frac{k(k+1)}{2}$, 即

$$Z(n) = \min\left\{k:\ n|\frac{k(k+1)}{2}\right\}.$$

它是罗马尼亚著名数论专家Jozsef Sandor教授引入的.

定义1.4 对任意正整数n及任意给定的整数$k \geq 2$, n的k次补数$a_k(n)$定义为最小的正整数m, 使得乘积$m \cdot n$为完全k次方幂.

特别地, 当$k = 2$时, $a_2(n)$称为n的平方补数.

定义1.5 对任意正整数n, 函数$OS(n)$表示区间$[1,\ n]$中$S(n)$为奇数的正整数n的个数; 函数$ES(n)$表示区间$[1,\ n]$中$S(n)$为偶数的正整数n的个数.

其次，我们再给出Smarandache函数的一些性质. 为方便起见, 设

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

是n 的标准分解式.

性质1.1 对任意正整数n, 我们有

$$S(n) = \max_{1 \le i \le k} \left\{ S(p_i^{\alpha_i}) \right\}.$$

特别地，$S(p) = p$.

性质1.2 如果$P(n) = \max\{p_1,\ p_2, \cdots,\ p_k\}$表示$n$的最大素因子, 则当$P(n) > \sqrt{n}$时有

$$S(n) = P(n).$$

性质1.3 $S(p^\alpha)$的上下界估计为

$$(p-1)\alpha + 1 \le S(p^\alpha) \le (p-1)[\alpha + 1 + \log_p \alpha] + 1.$$

性质1.4 $S(n)$函数均值的渐近公式

$$\sum_{n \le x} S(n) = \frac{\pi^2}{12} \frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x} \right).$$

性质1.5 对任意的素数p和满足$1 \le k < p$的正整数k及多项式

$$f(x) = x^{n_k} + x^{n_{k-1}} + \cdots + x^{n_1}, \quad (n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1)$$

有

$$S(p^{f(p)}) = (p-1)f(p) + pf(1).$$

特别地,

$$S\left(p^{kp^n}\right) = k\left(\phi(p^n) + \frac{1}{k}\right)p,$$

其中$\phi(n)$是Euler函数.

1.2 $S(n)$函数的研究现状

本节主要给出一些关于Smarandache函数及其复合函数的均值性质, 以及包含Smarandache函数的一些特殊方程的正整数解.

1.2.1 关于$S(n)$函数的基本定理

定理1.2.1 设$P(n)$表示n的最大素因子, 则对任意实数$x>1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{n\le x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$\zeta(s)$表示Riemann zeta-函数.

定理1.2.2 对任意固定的正整数k及任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)S(n)=x^2\sum_{i=0}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中$\Lambda(n)$是 Mangoldt 函数, $c_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$是常数, 并且$c_0=1$.

定理1.2.3 设$k\ge 2$为给定的整数, 则对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}S(n)\cdot d(n)=\frac{\pi^4}{36}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中$d(n)$为Dirichlet除数函数, $c_i\ (i=2,\ 3,\cdots,\ k)$为可计算的常数.

定理1.2.4 设$m>1$为给定的正整数且$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$表示$m$的标准分解式, 则对任意正整数$n$, 有渐近公式

$$S(m^n)=(p-1)\alpha n+O\left(\frac{m}{\ln m}\ln n\right),$$

其中$(p-1)\alpha=\max\limits_{1\le i\le k}\{(p_i-1)\alpha_i\}$.

由此定理可得到下面的

推论1.2.4 设$m>1$为给定的正整数且标准分解式为$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 那么我们有极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(m^n)}{n}=(p-1)\alpha,$$

其中$(p-1)\alpha=\max_{1\le i\le k}\{(p_i-1)\alpha_i\}$.

定理1.2.5 设$k\ge 2$为给定的整数, 则对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}S\left(Z(n)\right)=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中c_i $(i=2,\ 3,\cdots,\ k)$为可计算的常数.

特别地, 当$k=1$时有下面更简单的

推论1.2.5 对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}S\left(Z(n)\right)=\frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

定理1.2.6 对任意固定的正整数$k\ge 2$及任意实数$x\ge 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\left(S(n^k)-kP(n)\right)^2=\frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$\zeta(s)$ 是 Riemann zeta-函数, O_k表示大O常数仅依赖于k.

定理1.2.7 对任意给定的正整数k及任意实数$x>2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\left[S(n)-S(S(n))\right]^2=\frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中$\zeta(s)$ 是 Riemann zeta-函数, c_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 是可计算常数, 并且$c_1=1$.

定理1.2.8 对任意实数$x \geq 3$, 有

$$\sum_{n \leq x} \left(SM(n^k) - kP(n)\right)^2 = \frac{2k^2\zeta(\frac{3}{2})}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O_k\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

定理1.2.9 设$k \geq 2$为给定的正整数, 那么对任意实数$x \geq 3$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} \left(S\left(a_k(n)\right) - (k-1)P(n)\right)^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2})}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right),$$

其中$\zeta(s)$表示Riemann zeta-函数.

定理1.2.10 对任意实数$x \geq 3$, 有

$$\sum_{n \leq x} \left(SM\left(a_k(n)\right) - (k-1)P(n)\right)^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2})}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{k^2 x^{\frac{4}{3}}}{\ln x}\right).$$

定理1.2.11 设n为任意正整数, k为任意给定的正整数, 则对任意实数$x \geq 1$, 方程$n = S(n^k)$ 的解数满足渐近公式

$$U(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in A}} 1 = \pi\left(\frac{x}{k}\right) + O\left(1\right) = \frac{x}{k \ln x} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

其中A表示所有满足$n = S(n^k)$的正整数之集合.

定理1.2.12 设n 为任意给定的正整数, 方程

$$S(1^2) + S(2^2) + \cdots + S(n^2) = S\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

有且仅有$n = 1$, 2 两个正整数解.

定理1.2.13 对任意正整数k, 方程

$$S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k) = S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)$$

有无穷多个正整数解.

1.2.2 $\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}$是否为整数的问题

本节的主要目的是介绍一个包含Smarandache函数$S(n)$的猜想, 并部分得到解决. 具体地说就是对任意正整数n, 讨论和式

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)} \tag{1-1}$$

是否为整数这一问题, 我们猜测当$n>1$且$n\neq 8$时, 和式$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}$ 不可能为正整数. 虽然目前还不能证明这一猜想, 但是我们对它的正确性是深信不疑的. 下面利用初等方法证明了支持这一猜想的几个结论, 也就是对一些特殊的正整数, 我们证明了下面的

引理1.2.1 对任意正整数$n>1$, 设

$$C_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

则C_n不可能为正整数.

证明: 用反证法来证明这一结论. 假定对某一正整数$n>1$, C_n为整数. 则可设$C_n=m$以及$i=2^{\alpha_i}\cdot l_i$, $2\dagger l_i$, $i=1,\ 2,\cdots,\ n$. 现在设$\alpha=\max\{\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_k\}$. 则$\alpha$在所有$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$的分解式中只出现一次, 也就是说是唯一的. 若不然, 则存在两个正整数$1\le r,\ s\le n$使得$\alpha_r=\alpha_s=\alpha$. 由于$r\neq s$, 所以$l_r\neq l_s$, 从而在奇数l_r和l_s之间一定存在一个偶数, 设为$2l$. 于是$1<2^{\alpha}\cdot 2l=2^{\alpha+1}\cdot l\le n$, 即存在正整数$m=2^{\alpha_r+1}\cdot l$也介于1和$n$之间且它含2的方幂大于$\alpha$. 这与$\alpha$的定义矛盾. 从而证明$\alpha$是唯一的. 现在设$u=2^{\alpha}\cdot l_u$, $M=2^{\alpha-1}\cdot l_1\cdot l_2\cdots l_n$. 则

$$\begin{aligned}M\cdot C_n &= M\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{M}{u}\\ &= M\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\ &\quad+\frac{l_1\cdot l_2\cdots l_n}{2}.\end{aligned} \tag{1-2}$$

在(1-2)式中, 由假设$M\cdot C_n$为整数, 而由M的定义可知

$$M\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

也为整数, 但是$\frac{l_1\cdot l_2\cdots l_n}{2}$不是整数, 矛盾. 从而$C_n$不可能是正整数, 引理证毕.

定理1.2.14 当n为无平方因子数时, (1-1)式不可能是正整数.

证明: 首先, 我们给出无平方因子数的定义: 一个正整数n称作无平方因子数, 如果$n>1$且对任意素数p, 当$p\mid n$时有$p^2\dagger n$. 事实上对任意无平方因子数n, 可设$n=p_1\cdot p_2\cdots p_k$为n的标准分解式, 其中$p_1<p_2<\cdots<p_k$为素数. 于是由$S(n)$的定义不难看出$S(n)=S(p_1\cdot p_2\cdots p_k)=p_k$. 当$k=1$时, $n=p_1$为素数, 此时

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}=\sum_{d|p_1}\frac{1}{S(d)}=\frac{1}{S(1)}+\frac{1}{S(p_1)}=1+\frac{1}{p_1}. \tag{1-3}$$

由于$p_1>1$, 所以(1-3)式不可能是整数.

当$k>1$时, 注意到对任意$d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}$有$S(dp_k)=p_k$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)} &= \sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_k}\frac{1}{S(d)}=\sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(dp_k)}\\ &= \sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{p_k}\\ &= \sum_{d|p_1\cdot p_2\cdots p_{k-1}}\frac{1}{S(d)}+\frac{2^{k-1}}{p_k}\\ &= \cdots\cdots\\ &= \sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}}{p_i}.\end{aligned} \tag{1-4}$$

显然(1-4)式不可能是整数. 若不然, 假定$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}$为整数, 则由(1-3)式知$\sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}}{p_i}$也为整数. 不妨设

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}}{p_i}=m.$$

由于$k>1$, 所以p_k为奇素数, 因此

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{i-1}}{p_i} - m = \frac{2^{k-1}}{p_k},$$

或者

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^{i-1}}{p_i} - m \right) = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1} \cdot 2^{k-1}. \tag{1-5}$$

显然(1-5)式左边能够被p_k整除, 而右边不能被p_k整除, 矛盾, 所以(1-4)式不可能为整数. 于是完成了定理的证明.

定理1.2.15 对任意奇素数p及任意正整数α, 当$n = p^\alpha$且$\alpha \le p$ 时, (1-1)式不可能是正整数.

证明: 对于任意奇素数p及正整数α, 当$n = p^\alpha$时, 设$1 \le \alpha \le p$. 则不难计算出

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{1}{S(d)} &= \sum_{d|p^\alpha} \frac{1}{S(d)} = \frac{1}{S(1)} + \frac{1}{S(p)} + \frac{1}{S(p^2)} + \cdots + \frac{1}{S(p^\alpha)} \\ &= 1 + \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\alpha} \right). \end{aligned} \tag{1-6}$$

由引理1.2.1及(1-6)式可得到当$n = p^\alpha$且$1 \le \alpha \le p$时, (1-1)式不可能是整数. 于是证明了定理1.2.15.

定理1.2.16 对于任意正整数n, $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cdot p_k$表示$n$的标准分解式, 则当$S(n) = p_k$时, (1-1)式不可能是正整数.

证明: 为方便起见设$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cdot p_k = u \cdot p_k$并注意到$S(n) = p_k$, 所以我们有

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{1}{S(d)} &= \sum_{d|u} \frac{1}{S(d)} + \sum_{d|u} \frac{1}{S(dp_k)} = \sum_{d|u} \frac{1}{S(d)} + \sum_{d|u} \frac{1}{p_k} \\ &= \sum_{d|u} \frac{1}{S(d)} + \frac{d(u)}{p_k}, \end{aligned} \tag{1-7}$$

其中$d(u)$为除数函数.

在(1-7)式中显然当$d|u$时, $S(d) < p_k$. 所以在有理数$\sum\limits_{d|u}\frac{1}{S(d)}$中, 它的分母中不含素数$p_k$. 因而当$\sum\limits_{d|n}\frac{1}{S(d)}$为整数时, $\frac{d(u)}{p_k}$必须为整数, 从而

$$p_k \mid d(u) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{k-1}+1).$$

由于p_k为素数, 所以p_k整除某一(α_i+1). 从而可得

$$\alpha_i + 1 \geq p_k. \tag{1-8}$$

由Smarandache函数的性质及(1-8)式知

$$S(p_i^{\alpha_i}) \geq (p_i-1)\cdot\alpha_i + 1 \geq \alpha_i + 1 \geq p_k \tag{1-9}$$

且$S(p_i^{\alpha_i}) \neq p_k$, 这是因为$p_i \mid S(p_i^{\alpha_i})$, 因而$S(p_i^{\alpha_i}) > p_k$. 这与$S(n) = p_k$矛盾, 所以定理1.2.16成立.

由上述三个定理, 可以得到下面的

猜想 对任意正整数n, $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{S(d)}$ 为整数当且仅当$n = 1,\ 8$.

1.2.3 方程$\sum\limits_{d|n} S(d) = \phi(n)$可解性问题

在本小节, 我们给出了一个新的方程

$$\sum_{d|n} S(d) = \phi(n),$$

其中$\phi(n)$是Euler-函数. 能否找到该方程的所有正整数解, 是我们有待进一步解决的新问题. 在国内, 我们的许多学者研究了$\phi(n) = S(n^k)$(其中k为任意给定的正整数)方程的解的个数问题. 关于这个问题, 容易得到$n = 1$是该方程的解, 但我们并不知道这个方程是否有有限个解. 下面我们利用初等方法来解决这个问题, 对任意给定的正整数k给出了这个方程的全部解.

定理1.2.17 方程$S(n) = \phi(n)$有四个解: $n = 1,\ 8,\ 9,\ 12$.

证明: 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准因子分解式, 令

$$S(n) = \max_{1 \le i \le k} \{S({p_i}^{\alpha_i})\} = S(p^\alpha).$$

由$S(n)$和$\phi(n)$定义可得

$$\begin{aligned} \phi(n) &= p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1) \\ &= \phi(p^\alpha)\phi(n_1) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1) = S(p^\alpha). \end{aligned}$$

显然$n = 1$是方程$S(n) = \phi(n)$的解. 如果$n > 1$我们将分三种情况讨论如下:

(I) 如果$\alpha = 1$ 且$n = p$, 那么$S(n) = p \neq p - 1 = \phi(n)$. 也就是说, 不存在任何一个素数满足方程$S(n) = \phi(n)$. 如果$\alpha = 1$且$n = n_1 p$, 那么$S(n) = p \neq (p-1)\phi(n_1) = \phi(n_1 p)$. 所以该方程无解.

(II) 如果$\alpha = 2$, 那么有$S(p^2) = 2p$ 和$\phi(p^2 n_1) = p(p-1)\phi(n_1)$. 所以这时当且仅当

$$(p-1)\phi(n_1) = 2$$

才有$S(n) = \phi(n)$. 这可以分两种情况来讨论: $p - 1 = 1$, $\phi(n_1) = 2$; $p - 1 = 2$, $\phi(n_1) = 1$. 也即可得$p = 2$, $n_1 = 3$; $p = 3$, $n_1 = 1$. 这时方程$S(n) = \phi(n)$有两个解: $n = 12, 9$.

(III) 如果$\alpha = 3$, 显然有$S(2^3) = \phi(2^3) = 4$, 于是$n = 8$ 满足方程.

如果$\alpha \ge 3$ 且$p > 2$, 注意到

$$p^{\alpha-2} > 2^{\alpha-2} = (1+1)^{\alpha-2} = 1 + \alpha - 2 + \cdots + 1 > \alpha.$$

即有

$$p^{\alpha-1} > \alpha p \Rightarrow p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1) > \alpha p,$$

但

$$S(p^\alpha) \le \alpha p.$$

所以这种情况该方程无解.

综合上面三种情况的讨论, 我们立刻可得方程$S(n) = \phi(n)$有四个解: $n = 1, 8, 9, 12$.

于是完成了定理1.2.17 的证明.

引理1.2.2 如果p为一素数, 那么$S(p^k) \le kp$. 如果$k < p$, 那么$S(p^k) = kp$, 其中k为任意给定的正整数.

证明: (参阅文献[1]).

定理1.2.18 方程$\phi(n) = S(n^2)$有三个解: $n = 1,\ 24,\ 50.$

证明: 令$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 由$S(n)$和$\phi(n)$定义可得

$$S(n^2) = \max\{S(p_i^{2\alpha_i})\} = S(p^{2\alpha}),$$

其中p为素数以及

$$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1),$$

$$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1),$$

其中$(n_1, p) = 1$. 也就是说n_1和p的最大公因子为1.

显然$n = 1$是方程$\phi(n) = S(n^2)$的解. 如果$n > 1$我们将分类讨论如下:

(i) 令$\alpha = 1$.

如果$p = 2$, 那么$S(2^2) = 4$, $\phi(n) = (2-1)\phi(n_1)$, 由$S(n^2) = S(2^2) = \phi(n) = \phi(n_1)$可得$\phi(n_1) = 4$, 所以$\phi(n_1) = 4$, 于是$n = 2^2 \times 5$. 但$S(2^4 \cdot 5^2) = 10 \neq \phi(2^2 \times 5)$, 因此这个方程无解.

如果$p \geq 3$, 由引理可得$S(p^2) = 2p$, $\phi(n) = (p-1)\phi(n_1)$, 注意到$p \dagger (p-1)\phi(n_1)$, 因此这个方程也无解.

(ii) 令$\alpha = 2$.

如果$p = 2$, 那么$S(2^4) = 6 = 2\phi(n_1)$, 无解.

如果$p = 3$, 那么$S(3^4) = 9 = 3 \times 2\phi(n_1)$, 无解.

如果$p = 5$, 那么$S(5^4) = 20 = 5 \times 4\phi(n_1)$, 所以$n_1 = 2$, 因此$n = 5^2 \times 2$是方程的解.

如果$p \geq 7$, 那么$S(p^4) = 4p = p(p-1)\phi(n_1)$, 注意到$p - 1 > 4$, 无解.

(iii) 令$\alpha = 3$.

如果$p = 2$, 那么$S(2^6) = 8 = 4\phi(n_1)$, 所以$n_1 = 3$, 因此$n = 2^3 \times 3$是方程的解.

如果$p = 3$, 那么$S(3^6) = 15 = 3^2 \times 2\phi(n_1)$, 无解.

如果$p = 5$, 那么$S(5^6) = 25 = 5^2 \times 4\phi(n_1)$, 无解.

如果$p = 7$, 那么$S(7^6) = 42 = 7^2 \times 6\phi(n_1)$, 无解.

如果$p > 7$, 那么$S(p^6) = 6p = p(p-1)\phi(n_1)$, 注意到$p - 1 > 6$, 无解.

(iv) 令$\alpha = 4$. 如果$p = 2$, 那么$S(2^8) = 10 = 8\phi(n_1)$, 无解.

如果$p \geq 3$, 由引理可得$S(p^{2\alpha}) < 2p\alpha$, 注意到$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1)$和$p^{\alpha-1} > 2p\alpha$, 无解.

(v) 令$\alpha = 5$.

如果$p = 2$, 那么$S(2^{10}) = 12 = 2^4\phi(n_1)$, 无解.

如果$p \geq 3$, 由引理可得$S(p^{2\alpha}) < 2p\alpha$, 注意到$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1)$和$p^{\alpha-1} > 2p\alpha$, 无解.

(vi) 令$\alpha \geq 6$.

如果$p \geq 2$, 由引理可得$S(p^{2\alpha}) < 2p\alpha$, 注意到$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1)$和$p^{\alpha-1} > 2p\alpha$, 无解.

联合(i)到(vi), 我们立刻可得方程$\phi(n) = S(n^2)$有三个解: $n = 1$, 24, 50.

于是完成了定理的证明.

类似地, 利用同样的方法我们可以得出:

定理1.2.19 *方程$\phi(n) = S(n^3)$ 有三个解: $n = 1$, 48, 98.*

定理1.2.20 *方程$\phi(n) = S(n^4)$ 有一个解: $n = 1$.*

注: *使用类似的方法, 我们也可以推出方程$\phi(n) = S(n^k)$有有限个正整数解, 其中k为任意给定的正整数.*

1.2.4 关于F.Smarandache函数的一个方程

在文献[38]中, Charles Ashbacher 提出了下面三个未解决的问题:

未解决的问题1: 是否有有限个解满足$S(n)^2 + S(n) = kn$.

未解决的问题2: 是否存在正整数k, 使得没有正整数n满足$S(n)^2 + S(n) = kn$.

未解决的问题3: 是否存在最大的正整数k 使得存在正整数n 满足$S(n)^2 + S(n) = kn$.

目前, 还没有人研究过这些问题. 在这一部分, 我们将使用初等方法来研究这些问题, 并给与完全解决. 即就是, 我们将证明下面的结论:

首先, 我们给出两个简单引理.

引理1.2.3 *若$k > 0$并且$(k, h) = 1$, 则在数列$nk+h$, $n = 0, 1, 2, \ldots$中存在无限多个素数.*

证明: 参阅文献[2]中定理7.9.

引理1.2.4 *设p是素数, 则对任意正整数k, 我们有$S(p^k) \leq kp$. 当$k \leq p$时, 则有$S(p^k) = kp$.*

证明: 参阅文献[1].

定理1.2.21 对任意正整数k, 方程

$$S(n)^2+S(n)=kn \tag{1-10}$$

有有限个正整数解, 且每个解n都形如

$$n=pn_1,$$

其中$p=kn_1-1$是素数.

很显然, 这个定理完全解决了上述三个问题. 即就是, 对任意正整数k, 存在无限多个正整数n满足方程$S(n)^2+S(n)=kn$. 因此, 不存在最大的正整数k使得方程(1-10)有正整数解.

证明: 事实上, 根据函数$S(n)$的定义有$p^\alpha|n$, 使得

$$S(n)=S(p^\alpha)=mp,$$

其中m是正整数, 由引理1.2.4可知$m\le\alpha$.

设$n=p^\alpha n_1$, 其中$(p,n_1)=1$.

当$\alpha=2$时, 则有

$$m^2p^2+mp=kp^2n_1,$$

于是$p^2|m^2p^2+mp$, 因此$p|m$, 即就是$p\le m\le\alpha$.

依此类推, 一定存在最大的正整数u, 使得$p^u|m$, 则m 是有限大的正整数, 事实上这是矛盾的.

因此, $\alpha=1, m=1$,

$$p^2+p=kpn_1,$$

或$p=kn_1-1$时, 由引理1.2.3, 存在无限多个这样的素数p. 故方程(1-10)有无限多个正整数解$n=pn_1=(kn_1-1)n_1$. 这就完成了定理的证明.

1.2.5 关于F.Smarandache互反函数的方程

对于任意正整数n, Smarandache互反函数$S_c(n)$定义为满足$y\mid n!$且$1\le y\le m$的最大正整数m. 也就是$S_c(n)=\max\{m:\ y\mid n!,\ 其中1\le y\le m,\ m+1\dagger n!\}$. 例如$S_c(n)$的前几个值分别为:

$$S_c(1)=1,\ S_c(2)=2,\ S_c(3)=3,\ S_c(4)=4,\ S_c(5)=6,\ S_c(6)=6,$$

$S_c(7) = 10,\ S_c(8) = 10,\ S_c(9) = 10,\ S_c(10) = 10,\ S_c(11) = 12,$
$S_c(12) = 12,\ S_c(13) = 16,\ S_c(14) = 16,\ S_c(15) = 16, \cdots\cdots.$

这个函数最初是在文献[39]中由A.Murthy 引入的, 他研究了$S_c(n)$ 的初等性质, 并证明了以下的结论:

若$S_c(n) = x$ 且$n \neq 3$, 那么$x + 1$ 是大于n的最小素数.

在第四届国际数论和Smarandache问题研讨会议中, 张文鹏教授建议我们研究以下问题: 对于任意正整数k, 是否存在无穷组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$ 满足方程

$$S_c(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S_c(m_1) + S_c(m_2) + \cdots + S_c(m_k).$$

这个问题非常有趣, 因为它与著名的哥德巴赫问题有密切的联系. 本小节的主要目的是利用初等方法来研究这个问题, 并且使其彻底解决. 也就是我们来证明以下的结论:

定理1.2.22 对于任意正整数$k \geq 3$, 存在无穷多组正整数$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$满足方程

$$S_c(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S_c(m_1) + S_c(m_2) + \cdots + S_c(m_k).$$

显然当$k = 1$时, 方程成立. 是否存在无穷组正整数(m_1, m_2)满足$S_c(m_1 + m_2) = S_c(m_1) + S_c(m_2)$? 这是一个有待进一步讨论的问题, 建议有兴趣的读者去研究.

如果哥德巴赫猜想是正确的(即就是, 每一个偶数$2N \geq 6$ 能写成$2N = p_1 + p_2$ 的形式, 即两个奇素数的和), 那么存在无穷组正整数$(m_1,\ m_2)$ 满足方程$S_c(m_1 + m_2) = S_c(m_1) + S_c(m_2)$.

证明: 首先, 由三素数定理我们知道对于任意足够大的奇数$2N + 1$, 一定存在三个奇素数p_1, p_2和p_3满足方程:

$$2N + 1 = p_1 + p_2 + p_3. \tag{1-11}$$

对于任意正整数$k \geq 3$和足够大的素数p, 利用数学归纳法及(1-11)式, 我们能够推断$p + k - 1$可以写成k个奇素数的和:

$$p + k - 1 = p_1 + p_2 + \cdots + p_k. \tag{1-12}$$

事实上当$k = 3$, 则对于任意足够大的素数p, $p + 2$是一个奇数, 因此由(1-11)我们可得$p + 2 = p_1 + p_2 + p_3$. 因此(1-12)是正确的. 若$k = 4$, 那

么我们取$p_1 = 3$, 因此由(1-11)我们有

$$p + 3 = 3 + p_2 + p_3 + p_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4.$$

因此当$k = 4$时(1-12)是正确的. 如果$k \geq 5$, 我们取p是使得奇数$p + k - 1 - 3 \cdot (k - 3)$足够大的素数, 由(1-11)我们知道一定存在三个奇素数p_{k-2}, p_{k-1}和p_k满足方程:

$$p + k - 1 - 3 \cdot (k - 3) = p_{k-2} + p_{k-1} + p_k$$

或

$$p + k - 1 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{k-3} + p_{k-2} + p_{k-1} + p_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k,$$

其中$p_1 = p_2 = \cdots = p_{k-3} = 3$. 因此对于所有$k \geq 3$, (1-12) 是正确的.

现在我们利用(1-12)来完成定理的证明. 对于任意正整数$k \geq 3$, 我们取足够大的素数p, 则由(1-12)我们立刻可得

$$p - 1 = p_1 - 1 + p_2 - 1 + p_3 - 1 + \cdots\cdots + p_k - 1. \tag{1-13}$$

注意到对于所有素数p_i, $S_c(p_i - 1) = p_i - 1$, 取$m = p - 1$, $m_i = p_i - 1$, $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k$, 由(1-13)我们立即推得

$$\begin{aligned} p - 1 &= S_c(p-1) = S_c(m) = S_c(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) \\ &= p_1 - 1 + p_2 - 1 + p_3 - 1 + \cdots\cdots + p_k - 1 \\ &= S_c(m_1) + S_c(m_2) + S_c(m_3) + \cdots + S_c(m_k). \end{aligned}$$

也就是,

$$S_c(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S_c(m_1) + S_c(m_2) + \cdots + S_c(m_k).$$

因为存在无穷个素数p, 所以存在无穷组正整数$(m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k)$满足方程

$$S_c(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S_c(m_1) + S_c(m_2) + \cdots + S_c(m_k).$$

这就完成了定理的证明.

1.2.6 关于F.Smarandache函数的不等式

Kenichiro Kashihara博士建议我们研究以下不等式

$$S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots+S\left(x_n^n\right)\geq nS\left(x_1\right)\cdot S\left(x_1\right)\cdots S\left(x_n\right). \quad (1\text{-}14)$$

的可解性问题. 关于这个问题, 以前从未有人研究过. 本小节的主要目的是利用初等方法来研究这个问题, 并证明以下的结论:

定理1.2.23 *对于任意给定的正整数$n>1$, 不等式(1-14)有无穷组正整数解$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$.*

证明: 如果$n=1$, 那么此时不等式(1-14)变成了$S(x_1)\geq S(x_1)$, 且对于所有的正整数x_1成立. 不失一般性假定$n\geq 2$, 取$x_1=x_2=\cdots x_{n-1}=1$, $x_n=p>n$, 其中p是素数. 注意到$S(1)=1$, $S(p)=p$和$S(p^n)=np$, 因此我们有

$$S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots+S\left(x_n^n\right)=n-1+S(p^n)=n-1+np \quad (1\text{-}15)$$

和

$$nS\left(x_1\right)\cdot S\left(x_1\right)\cdots S\left(x_n\right)=nS(p)=np. \quad (1\text{-}16)$$

由(1-15)和(1-16)我们立即可推得

$$S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots+S\left(x_n^n\right)\geq nS\left(x_1\right)\cdot S\left(x_1\right)\cdots S\left(x_n\right). \quad (1\text{-}17)$$

因为存在无穷个素数$p>n$, 因此所有正整数组

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=(1,\ 1,\ \cdots,p)$$

是不等式(1-14)的解. 这样不等式(1-14)就存在无穷多组正整数解$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$. 这就证明了定理1.2.23.

定理1.2.24 *对于任意给定的正整数$n\geq 3$, 如果$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$满足不等式(1-14), 那么$x_1$, x_2, $\cdots$, x_n中至少存在$n-1$个1.*

显然定理1.2.24中的条件是必要的. 事实上若$n=2$, 我们取$x_1=x_2=2$, 那么我们有

$$S(x_1^2)+S(x_2^2)=S(2^2)+S(2^2)=4+4=8=2S(2)S(2)=2S(x_1)S(x_2).$$

因此当$n=2$时, 定理1.2.24是不成立的.

证明: 设$n\geq 3$, 如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$满足不等式(1-14), 那么在x_1, x_2, $\cdots$, x_n 中至少存在$n-1$个1. 事实上如果存在$x_1>1$, $x_2>1$, $\cdots$, $x_k>1$这里$2\leq k\leq n$满足不等式

$$S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots+S\left(x_n^n\right)\geq nS\left(x_1\right)\cdot S\left(x_1\right)\cdots S\left(x_n\right). \tag{1-18}$$

那么由函数$S(n)$的定义和性质我们有$S(x_i)>1$和$S\left(x_i^n\right)\leq nS(x_i)$, $i=1, 2, \cdots, k$. 注意到当$a_i>1$, $k\geq 3$ 时, $a_1+a_2+\cdots+a_k<a_1a_2\cdots a_k$, $i=1, 2, \cdots, k$; 如果$k=2$, 则$a_1+a_2\leq a_1a_2$, 并且等号成立当且仅当$a_1=a_2=2$ $(a_1>1, a_2>1)$. 因此不等式(1-18)变为

$$n-k+S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)+\cdots+S\left(x_k^n\right)\geq nS(x_1)S(x_2)\cdots S(x_k). \tag{1-19}$$

如果$k\geq 3$, 那么由(1-19)和$S(n)$的性质我们有

$$n-k+n\left[S\left(x_1\right)+S\left(x_2\right)+\cdots+S\left(x_k\right)\right]\geq nS(x_1)S(x_2)\cdots S(x_k)$$

或

$$\frac{n-k}{n}+S\left(x_1\right)+S\left(x_2\right)+\cdots+S\left(x_k\right)\geq S(x_1)S(x_2)\cdots S(x_k). \tag{1-20}$$

注意到$0\leq \frac{n-k}{n}<1$, 因此不等式(1-20)是不可能的, 因为

$$S(x_1)S(x_2)\cdots S(x_k)\geq S(x_1)+S(x_2)+\cdots+S(x_k)+1.$$

如果$k=2$, 那么不等式(1-19)成为

$$n-2+S\left(x_1^n\right)+S\left(x_2^n\right)\geq nS(x_1)S(x_2). \tag{1-21}$$

注意到$S(x^n)\leq nS(x)$, $S(x_1)+S(x_2)\leq S(x_1)S(x_2)$ 且等式成立当且仅当$x_1=x_2=2$, 因此若$S(x_1)>2$ 或$S(x_2)>2$, 那么(1-21)是不成立的. 如果$S(x_1)=S(x_2)=2$, 那么$x_1=x_2=2$. 因此, 不等式(1-21)变成

$$S\left(2^n\right)\geq \frac{3n}{2}+1. \tag{1-22}$$

设$S(2^n)=m$, 则当$n\geq 3$时, $m\geq 4$. 由$S(n)$的定义和性质我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m-1}{2^i}\right]<n\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{2^i}\right].$$

这样
$$n \geq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{m-1}{2^i}\right] > \frac{m-1}{2} + \frac{m-1}{4} = \frac{3(m-1)}{4},$$
由(1-22)我们可得
$$m = S(2^n) \geq \frac{3n}{2} + 1 \geq \frac{9}{8}(m-1) + 1 = m + \frac{m-1}{8} > m.$$
这样不等式是不可能的. 因此若$n \geq 3$且$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$满足不等式(1-14), 那么在$x_1, x_2, \cdots, x_n$中至少存在$n-1$个1. 这就完成了定理1.2.24的证明.

1.2.7 关于F.Smarandache函数的同余方程

在文献[9]中, Kenichiro Kashihara博士建议我们研究同余方程
$$S^3(x) - 3S(x) - 1 \equiv 0 (\bmod\ x). \tag{1-23}$$
的可解性. 张文鹏教授认为这一问题特别简单, 于是建议我们寻求方程
$$S^2(x) - 5S(x) + p = x, \tag{1-24}$$
的所有正整数解, 其中p是素数.

本小节的主要目的是利用初等方法来研究这两个问题, 并彻底解决. 也就是我们要证明下面的定理:

定理1.2.25 同余方程(1-23)有且仅有一个正整数解$x = 1$.

证明: 显然$x = 1$ 满足同余方程(1-23). 现在我们来证明对于任意正整数$x > 1$, 同余方程(1-23)不成立. 事实上若$x > 1$ 满足同余方程(1-23), 设$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$是$x$的素因子分解式, 则由$S(x)$的性质可知
$$S(x) = \max\{S(p_1^{\alpha_1}),\ S(p_2^{\alpha_2}),\ \cdots,\ S(p_s^{\alpha_s})\} \equiv S(p^{\alpha}), \tag{1-25}$$
其中$p \mid S(p^{\alpha})$. 注意到$S^3(x) - 3S(x) - 1 = mx$, $p \mid S(x)$, $p \mid x$, 由(1-25)我们立即可得$p \mid 1$, 这与$p > 1$矛盾. 因此同余方程(1-23)有且仅有一个正整数解$x = 1$. 这就证明了定理1.2.25.

定理1.2.26 *设p是任意给定的素数. 若$p = 2$, 那么方程(1-24)没有正整数解; 若$p = 3$, 那么方程(1-24)有且仅有一个正整数解$x = 9$; 若$p = 5$,*

则方程(1-24)有且仅有两个正整数解$x = 1,\ 5$; 若$p = 7$, 则方程(1-24)有且仅有两个正整数解$x = 21,\ 483$. 若$p \geq 11$, 那么方程(1-24)有且仅有一个正整数解$x = p(p-4)$.

证明: 事实上, 若$p = 2$, 显然$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$不是方程(1-24)的解. 设$x \geq 8$满足方程(1-24), $S(x) = S(p_1^{\alpha})$, 则由$p_1 \mid x$, $p_1 \mid S(x)$和$S^2(x) - 5S(x) + 2 = x$我们推断得到$p_1 \mid 2$. 因此$p_1 = 2$. 设$x = 2^{\alpha} \cdot y$和$S(2^{\alpha}) = 2m$ $(m \leq \alpha)$, 则

$$4m^2 - 10m + 2 = 2^{\alpha} \cdot y. \tag{1-26}$$

很容易检验$\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$不满足方程方程(1-26). 如果$\alpha \geq 5$, 则注意到$m \leq \alpha - 1$, 我们得到$x = 2^{\alpha} \cdot y \geq 2^{\alpha} > 4(\alpha-1)^2 - 10(\alpha-1) + 2 \geq 4m^2 - 10m + 2$. 因此当$p = 2$时, 方程(1-24)没有正整数解.

当$p = 3$时, 则$x = 1,\ 2,\ 3$不满足方程(1-24). 设$x \geq 4$满足方程(1-24), $S(x) = S(p_1^{\alpha})$, 则由$p_1 \mid x$, $p_1 \mid S(x)$和$S^2(x) - 5S(x) + 3 = x$, 我们有$p_1 \mid 3$和$p_1 = 3$. 设$x = 3^{\alpha} \cdot y$和$S(3^{\alpha}) = 3m$, 那么

$$9m^2 - 15m + 3 = 3^{\alpha} \cdot y. \tag{1-27}$$

容易检验$\alpha = 1,\ 3,\ 4,\ 5$不满足方程(1-27), 但是当$m = 2$和$y = 1$时, $\alpha = 2$满足方程(1-27). 若$\alpha \geq 6$, 那么$m \leq \alpha - 1$, 我们有$x = 3^{\alpha} \cdot y \geq 3^{\alpha} > 9(\alpha-1)^2 - 15(\alpha-1) + 3 \geq 9m^2 - 15m + 3$. 因此当$p = 3$时, 方程(1-24)有且仅有一个正整数解$x = 9$.

同理, 当$p = 5$时, 我们能证明方程(1-24)有且仅有两个正整数解$x = 1$和$x = 5$.

若$p = 7$, 那么$x = 1,\ 2$不满足方程(1-24). 设$x \geq 3$满足方程(1-24), $S(x) = S(p_1^{\alpha})$, 则由$p_1 \mid x$, $p_1 \mid S(x)$和$S^2(x) - 5S(x) + 7 = x$, 我们可得$p_1 \mid 7$和$p_1 = 7$. 设$x = 7^{\alpha} \cdot y$, $S(7^{\alpha}) = 7m$, 那么有

$$7^2m^2 - 35m + 7 = 7^{\alpha} \cdot y. \tag{1-28}$$

设$\alpha = 1$, 则$m = 1$和$y = 7 - 4 = 3$. 因此$x = 21$是方程(1-24)的一个正整数解. 若$\alpha = 2$, 则$m = 2$和$4p - 9 = py$. 因此$p \mid 9$, 与$p \geq 7$矛盾. 设$\alpha = 3$, 则$m = 3$和$63 - 14 = 7^2y$. 因此$y = 1$. 同时, $x = 7^3$是

方程(1-24) 的另一个正整数解. 当$\alpha \geq 4$时, 注意到$m \leq \alpha - 1$, 我们有$x = 7^\alpha \cdot y \geq 7^\alpha > 49(\alpha-1)^2 - 35(\alpha-1) + 7 \geq 49m^2 - 35m + 7$. 因此当$p = 7$ 时, 方程(1-24)有且仅有两个正整数解$x = 21$ 和$x = 483$.

当$p \geq 11$ 时, 那么$x = 1$, 2不满足方程(1-24). 设$x \geq 3$ 满足方程(1-24), $S(x) = S(p_1^\alpha)$, 那么由$p_1 \mid x$, $p_1 \mid S(x)$ 和$S^2(x) - 5S(x) + p = x$, 我们可得$p_1 \mid p$ 和$p_1 = p$. 设$x = p^\alpha \cdot y$, $S(p^\alpha) = pm$, 那么可得

$$p^2m^2 - 5pm + p = p^\alpha \cdot y. \tag{1-29}$$

若$\alpha = 1$, 则$m = 1$ 和$y = p - 4$. 因此$x = p(p-4)$ 方程(1-24) 的一个正整数解. 显然$\alpha = 2$, 3 不满足方程(1-29). 若$\alpha \geq 4$, 则注意到$m \leq \alpha-1$, 我们可得$x = p^\alpha \cdot y \geq p^\alpha > p^2(\alpha-1)^2 - 5p(\alpha-1) + p \geq p^2m^2 - 5pm + p$. 因此当$p \geq 11$, 则方程(1-24)有且仅有一个正整数解$x = p(p-4)$. 这就完成了定理的证明.

1.2.8 关于F.Smarandache函数的奇偶性

现在我们令$OS(n)$表示区间[1, n]中$S(n)$为奇数的正整数n的个数; $ES(n)$表示区间[1, n]中$S(n)$为偶数的正整数n的个数. 在文献[9]中, Kenichiro Kashihara博士提出了下面的问题：

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{ES(n)}{OS(n)}$$

是否存在? 如果存在, 确定其极限.

关于这一问题, 至今似乎没有人研究, 至少我们没有看到过有关方面的论文. 本节的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 具体地说也就是证明了下面的:

定理1.2.27 对任意正整数$n > 1$, 我们有估计式

$$\frac{ES(n)}{OS(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

证明: 首先我们估计$ES(n)$的上界. 事实上当$n > 1$时, 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式, 那么由函数$S(n)$的定义及性质可

设$S(n)=S\left(p_i^{\alpha_i}\right)=m\cdot p_i$. 若$m=1$, 那么$S(n)=p_i$为奇数, 除非$n=2$. 令$M=\ln n$, 于是我们有

$$\begin{aligned} ES(n) &= \sum_{\substack{k\le n\\ 2|S(k)}} 1 \le 1+\sum_{\substack{k\le n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\ge 2}} 1 \\ &\le 1+\sum_{S(k)\le M} 1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}} 1. \end{aligned} \tag{1-30}$$

现在我们分别估计(1-30)式中的各项, 显然有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 2}} 1 &\le \sum_{\substack{kp^2\le n\\ 2p>M}} 1+\sum_{\substack{kp^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}} 1 \\ &\le \sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}}\ \sum_{k\le\frac{n}{p^2}} 1+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}}\ \sum_{k\le\frac{n}{p^\alpha}} 1 \\ &\ll \sum_{\frac{M}{2}<p\le\sqrt{n}} \frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p^\alpha\le n\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge 3}} \frac{n}{p^\alpha} \\ &\ll \frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ \alpha\ge p}} \frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ 3\le\alpha<p}} \frac{n}{p^\alpha} \\ &\ll \frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ \alpha>\sqrt{M}}} \frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{n}\\ p>\sqrt{M},\ \alpha\ge 3}} \frac{n}{p^\alpha} \\ &\ll \frac{n}{\ln n}+\frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}}+\frac{n}{M}\ll\frac{n}{\ln n}. \end{aligned} \tag{1-31}$$

对于(1-30)式中的另一项, 我们需要采取新的估计方法. 对任意素数$p\le M$, 令$\alpha(p)=\left[\frac{M}{p-1}\right]$, 即就是$\alpha(p)$表示不超过$\frac{M}{p-1}$的最大整数. 设$u=\prod\limits_{p\le M} p^{\alpha(p)}$. 对任意满足$S(k)\le M$的正整数$k$, 设$S(k)=S(p^\alpha)$, 则由$S(k)$的定义一定有$p^\alpha|M!$, 从而, $\alpha\le\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[\frac{M}{p^j}\right]\le\frac{M}{p-1}$. 所以所有满足$S(k)\le M$的正整数$k$一定整除$u$，所有这样$k$的个数不会超过$u$的正因数的个数, 即就是$d(u)$. 所以我们有

$$\sum_{S(k)\le M} 1 \le \sum_{d|u} 1=\prod_{p\le M}(1+\alpha(p))=\prod_{p\le M}\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{p\le M} \ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\right), \tag{1-32}$$

其中$\exp(y)=e^y$.

由素数定理的两种形式(参阅文献[2]及[3])

$$\pi(M)=\sum_{p\le M} 1 = \frac{M}{\ln M}+O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right)$$

及

$$\sum_{p\le M}\ln p = M + O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$$

可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\le M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right) \le \sum_{p\le M}\ln\left(1+\frac{M}{p-1}\right)\\
= &\sum_{p\le M}\left[\ln(p-1+M)-\ln p-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\\
\le &\ \pi(M)\cdot\ln(2M)-\sum_{p\le M}\ln p+\sum_{p\le M}\frac{1}{p}\\
= &\ \frac{M\cdot\ln(2M)}{\ln M}-M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)=O\left(\frac{M}{\ln M}\right).
\end{aligned} \tag{1-33}$$

注意到$M=\ln n$, 由(1-32)及(1-33)式立刻得到估计式:

$$\sum_{S(k)\le M} 1 \ll \exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right), \tag{1-34}$$

其中c为一正常数.

注意到$\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right)\ll\frac{n}{\ln n}$, 于是结合(1-30), (1-31)及(1-34)式立刻推出估计式:

$$ES(n)=\sum_{\substack{k\le n\\ 2|S(k)}} 1 = O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

显然$OS(n)+ES(n)=n$, 所以由上式可得:

$$OS(n) = n - ES(n) = n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

从而

$$\frac{ES(n)}{OS(n)} = \frac{O\left(\frac{n}{\ln n}\right)}{n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理的证明.

由此定理我们立刻得到下面的:

推论1.2.27 对任意正整数n, 我们有极限

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{ES(n)}{OS(n)} = 0.$$

1.2.9 一个包含平方补数的方程

在本小节中, 为方便期间我们依然用$a(n)$表示n的平方补数, 利用初等方法以及一些有关哥德巴赫猜想的著名结果研究了一类包含平方补数函数方程的可解性, 并证明了该方程有无穷多组正整数解. 即就是证明了下面的结论:

定理1.2.28 设m为完全平方数, 那么对任意正整数$k \geq 2$, 方程

$$a(n_1) + a(n_2) + \cdots + a(n_k) = m \cdot a(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$$

有无穷多组正整数解$(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k)$.

注释: 本文定理中的m显然带有特殊性, 对于一般的正整数m, 该方程是否有无穷多组正整数解是一个公开的问题. 对于任意正整数$r > 2$, 我们同样可以考虑r次幂补数$a_r(n)$以及任意正整数$k > 1$, 方程:

$$a_r(n_1) + a_r(n_2) + \cdots + a_r(n_k) = m \cdot a_r(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$$

是否具有类似的结论? 建议有兴趣的读者和我们一起继续进行研究!

证明: 我们用初等方法以及有关哥德巴赫猜想的结论来完成定理的证明. 为引用方便, 这里我们把陈景润定理及三素数定理的结论予以介绍:

陈景润定理: 任意一个充分大的偶数$2N$都可以表示成$2N = p_1 + p_2$或者$2N = p_1 + p_2p_3$, 其中p_1, p_2, p_3为不同的素数.

三素数定理: 任意一个充分大的奇数都可以表示成三个奇素数之和. 即就是$2N + 1 = p_1 + p_2 + p_3$, 其中p_1, p_2及p_3为奇素数.

现在我们可以利用以上两个重要结论来完成我们定理的证明. 由$a(n)$的定义及性质显然有$a(p_1) = p_1$, $a(p_1p_2) = p_1p_2$, $a(n^2p) = p$, 这里p, p_1及p_2为不同的素数. 由于m为完全平方数，所以可设$m = \mu^2$, 下面我们讨论k的不同情况.

(i). 当$k = 2$时, 如果μ为奇数，则μ^2p为奇数，$2\mu^2p$为偶数，于是由陈景润定理知当$2\mu^2p$足够大时有$2\mu^2p = p_1 + p_2$ 或者$2\mu^2p = p_1 + p_2p_3$, 其中p_1, p_2, p_3 为不同的素数. 于是取$n_1 = p_1$, $n_2 = p_2$ 或者$n_1 = p_1$, $n_2 = p_2p_3$, 则有

$$\mu^2a(n_1 + n_2) = \mu^2a(2\mu^2p) = \mu^2 \cdot 2p = n_1 + n_2 = a(n_1) + a(n_2).$$

由于p为任意充分大的素数, 所以(n_1, n_2)有无穷多组. 即原方程有无穷多组正整数解(n_1, n_2). 因此, 定理的结论是正确的.

如果μ为偶数, 则μ^2p为偶数. 同样由陈景润定理可知当μ^2p足够大时,有$\mu^2p = p_1 + p_2$ 或者$\mu^2p = p_1 + p_2p_3$. 因而有

$$\mu^2a(p_1 + p_2) = \mu^2a(\mu^2p) = \mu^2p = p_1 + p_2 = a(p_1) + a(p_2)$$

或者

$$\mu^2a(p_1 + p_2p_3) = \mu^2a(\mu^2p) = \mu^2p = p_1 + p_2p_3 = a(p_1) + a(p_2p_3).$$

即此时方程有无穷组正整数解.

(ii). 当$k = 3$时, 如果μ为奇数, 则μ^2p为奇数. 于是由三素数定理知对于足够大的奇素数p有$\mu^2p = p_1 + p_2 + p_3$, 取$n_1 = p_1$, $n_2 = p_2$, $n_3 = p_3$, 则有

$$\begin{aligned}\mu^2a(n_1 + n_2 + n_3) &= \mu^2a(p_1 + p_2 + p_3) = \mu^2a(\mu^2p)\\ &= \mu^2p = p_1 + p_2 + p_3 = a(n_1) + a(n_2) + a(n_3).\end{aligned}$$

如果μ为偶数, 则μ^2p为偶数. 于是由陈景润定理可知对于足够大的素数p有$\mu^2p=2+p_1+p_2$ 或者$\mu^2p=2+p_1+p_2p_3$. 因而有

$$\begin{aligned}\mu^2a(2+p_1+p_2) &= \mu^2a(\mu^2p)=\mu^2p=2+p_1+p_2\\ &= a(2)+a(p_1)+a(p_2)\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\mu^2a(2+p_1+p_2p_3) &= \mu^2a(\mu^2p)=\mu^2p=2+p_1+p_2p_3\\ &= a(2)+a(p_1)+a(p_2p_3).\end{aligned}$$

即此时方程也有无穷组正整数解(n_1,n_2,n_3).

(iii). 当$k>3$时, 我们分两种情况讨论:

(a) 如果μ为奇数, 则μ^2p为奇数. 于是当k为奇数时，对充分大的素数p, μ^2p也足够大, 由三素数定理(推广形式为：设$k\geq 3$为奇数, 则任意充分大的奇数都可以表示成k个奇素数之和)不难得到$\mu^2p=p_1+p_2+\cdots+p_k$. 因而有

$$\begin{aligned}&\mu^2a(p_1+p_2+\cdots+p_k)\\ =\ &\mu^2a(\mu^2p)=\mu^2p=p_1+p_2+\cdots+p_k\\ =\ &a(p_1)+a(p_2)+\cdots+a(p_k).\end{aligned}$$

此时取$n_1=p_1$, $n_2=p_2$, $\cdots$, $n_k=p_k$并注意素数p任意性即可得到我们的定理.

如果k为偶数, 则当μ^2p足够大时同样由三素数定理的推广形式容易得到$\mu^2p=2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}$. 于是有

$$\begin{aligned}&\mu^2a(2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1})\\ =\ &\mu^2a(\mu^2p)=\mu^2p=2+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}\\ =\ &a(2)+a(p_1)+a(p_2)+\cdots+a(p_{k-1}).\end{aligned}$$

取$n_1=2$, $n_2=p_1$, $\cdots$, $n_k=p_{k-1}$ 立刻得到定理的结论. 也就是说此时方程仍然有无穷组正整数解$(n_1,n_2,\cdots,n_k)$.

(b) 如果μ为偶数, 则μ^2p也为偶数. 于是当k为偶数时, 对充分大的μ^2p, 设$\mu^2p=3+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}$. 因而有

$$\mu^2a(3+p_1+p_2+\cdots+p_{k-1})$$

$$\begin{aligned} &= \mu^2 a(\mu^2 p) = \mu^2 p = 3 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1} \\ &= a(3) + a(p_1) + a(p_2) + \cdots + a(p_{k-1}). \end{aligned}$$

如果k为奇数, 则当$\mu^2 p$足够大时可设$\mu^2 p = 2 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1}$, 则

$$\begin{aligned} & \mu^2 a(2 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1}) \\ &= \mu^2 a(\mu^2 p) = \mu^2 p = 2 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1} \\ &= a(2) + a(p_1) + a(p_2) + \cdots + a(p_{k-1}). \end{aligned}$$

也就是说此时方程同样有无穷组正整数解$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$.

结合以上各种情况就完成了定理的证明.

1.3 关于Smarandache函数的新问题

问题1.1: 当$n > 1$且$n \neq 8$时, 和式$\sum\limits_{d|n} \frac{1}{S(d)}$ 不可能为正整数.

问题1.2: 研究方程

$$\sum_{d|n} S(d) = \phi(n),$$

的可解性, 并寻求该方程的所有正整数解, 其中$\phi(n)$是 Euler-函数.

问题1.3: 令$OS(n)$表示区间$[1, n]$中$S(n)$为奇数的正整数n的个数, $ES(n)$表示区间$[1, n]$中$S(n)$为偶数的正整数n的个数. 研究函数$OS(n)$和$ES(n)$的相关性质.

问题1.4: 对于一般的正整数m, 方程

$$a(n_1) + a(n_2) + \cdots + a(n_k) = m \cdot a(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$$

是否有无穷多组正整数解. 其中$a(n)$表示n的平方补数. 对于任意正整数$r > 2$, 我们同样可以考虑r次幂补数$a_r(n)$以及任意正整数$k > 1$, 方程

$$a_r(n_1) + a_r(n_2) + \cdots + a_r(n_k) = m \cdot a_r(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$$

是否具有类似的结论.

第二章　关于$SL(n)$函数

有不少学者对函数$SL(n)$的相关问题作了一系列研究, 并取得了十分重要的结果. 在本章中我们将介绍有关$SL(n)$函数的均值以及关于$SL(n)$函数的特殊方程的解等问题. 此外, 我们还将进一步提出有关Smarandache函数$SL(n)$的一些新问题.

2.1　引言

定义2.1　对任意正整数n, Smarandache LCM 函数$SL(n)$ 定义为最小的正整数k, 使得$n \mid [1,\ 2,\ \cdots,\ k]$, 这里$[1,\ 2,\ \cdots,\ k]$ 表示$1, 2, \cdots, k$ 的最小公倍数.

下面给出$SL(n)$函数的一些简单性质.

性质2.1　对任意的正整数n, 有

$$SL(n) = \max_{1\le i\le k} \{p_i^{\alpha_i}\}. \tag{2-1}$$

特别地, $SL(p^{\alpha}) = p^{\alpha}$.

性质2.2　对任意素数p, 有

$$SL(p) = S(p) = p. \tag{2-2}$$

性质2.3　当$n = 12$ 或者$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} p$时有

$$SL(n) = S(n), \quad S(n) \neq n, \tag{2-3}$$

其中$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_r,\ p$表示不同的素数, 而$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 是满足$p > p_i^{\alpha_i},\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r$ 的正整数.

2.2　$SL(n)$函数的研究现状

2.2.1　关于$SL(n)$函数的基本定理

定理2.2.1　设$k \ge 2$ 为给定的正整数, 那么对于任意的实数$x > 1$,

有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} SL(n) = \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中c_i $(i=2,\ 3,\cdots,k)$ 为可计算的常数.

从此定理可以推出下面的

推论2.2.1 对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} SL(n) = \frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right).$$

定理2.2.2 对任意正整数n, 有渐近公式

$$SL(n!) = \left[2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]^n.$$

我们对定理2.2.2的渐近式两边求极限就可得到

推论2.2.2 当$n\to\infty$时, 有极限式

$$\lim_{n\to\infty}\left[SL(n!)\right]^{\frac{1}{n}} = 2 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(SL(n!))}{n} = \ln 2.$$

定理2.2.3 对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\left(SL(n)-P(n)\right)^2 = \frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数, $P(n)$ 表示n的最大素因子.

定理2.2.4 任意给定正整数k, 则对任意实数$x>2$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}\left[SL(n)-S(n)\right]^2 = \frac{2}{3}\cdot\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta-函数, c_i $(i=1,\ 2,\cdots,\ k)$ 是可计算常数.

定理2.2.5　方程$\sum\limits_{d|n} SL(d)=n$有且仅有两个正整数解$n=1,\ 28$.

定理2.2.6　方程$\sum\limits_{d|n} S(d)=\sum\limits_{d|n} SL(d)$有无限多个解, 分别是$n=1$, $2^{\alpha}p_1p_2\cdots p_k$, 其中$k$ 是任意正整数, $\alpha=0,\ 1$ 或2, 且$2<p_1<\cdots<p_k$ 是各不相同的素数.

2.2.2　关于$SL(n!)$函数值的极限

引理2.2.1　对任意正整数$n>1$，当$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准分解式时, 有恒等式

$$SL(n)=\max_{1\le i\le k}\{p_i^{\alpha_i}\}. \tag{2-4}$$

证明: 参阅文献[4].

引理2.2.2　对于任意给定的素数p及正整数$n\ge 1$, 如果n的p进制表示式为$n=a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}$且$\alpha_s>\alpha_{s-1}>\cdots>\alpha_1\ge 0$, 其中$1\le a_i\le p-1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$, 假设$a(n,p)=\sum\limits_{i=1}^{s}a_i$时有恒等式

$$\alpha_p(n)=\alpha(n)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{1}{p-1}(n-a(n,p)),$$

其中$[x]$ 表示不超过x 的最大正整数.

证明: 由$[x]$ 的性质可知

$$\begin{aligned}\left[\frac{n}{p^i}\right] &= \left[\frac{a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}}{p^i}\right]\\ &= \begin{cases}\sum\limits_{j=k}^{s}a_jp^{\alpha_j-i}, & \text{如果}\quad \alpha_{k-1}<i\le\alpha_k\\ 0, & \text{如果}\quad i\ge\alpha_s.\end{cases}\end{aligned}$$

由此有

$$\begin{aligned}\alpha(n) &\equiv \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}}{p^i}\right]\\ &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{\alpha_j}a_jp^{\alpha_j-k}=\sum_{j=1}^{s}a_j(1+p+p^2+\cdots+p^{\alpha_j-1})\\ &= \sum_{j=1}^{s}a_j\cdot\frac{p^{\alpha_j}-1}{p-1}=\frac{1}{p-1}\sum_{j=1}^{s}(a_jp^{\alpha_j}-a_j)\\ &= \frac{1}{p-1}(n-a(n,p)).\end{aligned}$$

引理2.2.2得证.

定理2.2.7 对任意正整数n, 有渐近公式

$$SL(n!)=\left[2+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]^n.$$

证明: 设$n!=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ 为$n!$ 的标准素因子分解式. 由引理2.2.2, 有

$$SL(n!)=\max_{1\le i\le k}\{p_i^{\alpha_i}\}=p^{\alpha}.$$

此外, 对于任意给定的素数p及正整数n, 如果$n=a_1p^{\alpha_1}+a_2p^{\alpha_2}+\cdots+a_sp^{\alpha_s}$且$\alpha_s>\alpha_{s-1}>\cdots>\alpha_1\ge 0$, 其中$1\le a_i\le p-1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$, 则有$a(n,p)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$. 由引理2.2.2及文献[5], 有

$$\alpha_p(n)\equiv\alpha(n)\equiv\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{1}{p-1}(n-a(n,p)). \tag{2-5}$$

由于(2-5)式右边实际上是一个有限和, 因为必有整数k满足$p^k\le n<p^{k+1}$, 这样等式(2-5) 就成为

$$\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{n}{p^i}\right],$$

又由(2-4)式及(2-5)式可知

$$SL(n!)=p^{\alpha}=p^{\frac{n-a(n,p)}{p-1}}=e^{\frac{n-a(n,p)}{p-1}\ln p}.$$

由文献[6]得

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{n}{p^i}\right]<\sum_{i=1}^{s}\frac{n}{p^i}=\frac{n}{p-1},$$

再由文献[5]有

$$\alpha(n)=\frac{1}{p-1}(n-a(n,p)),$$

并且

$$a(n,p)\leq\frac{p}{\ln p}\ln n,$$

所以$\dfrac{a(n,p)}{p-1}=O\left(\dfrac{\ln n}{\ln p}\right)$. 又由引理2.2.2得

$$\alpha(n,p)=\alpha(p)=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{n}{p^i}\right]=\frac{n}{p-1}+O\left(\frac{\ln n}{\ln p}\right),$$

另外, 对每一个α_i均有

$$\alpha_i=\alpha(p_i)=\frac{n}{p_i-1}+O\left(\frac{\ln n}{\ln p_i}\right),$$

$$p_i^{\alpha_i}=p_i^{\frac{n}{p_i-1}+O\left(\frac{\ln n}{\ln p_i}\right)},$$

即

$$p_i^{\alpha_i}=e^{\frac{n\ln p_i}{p_i-1}+O(\ln n)}.$$

注意到, 当$p_i<p_j$时有

$$\frac{\ln p_i}{p_i-1}<\frac{\ln p_j}{p_j-1}.$$

显然在上式中, 当$p_i=2$时, $2^{\alpha(2)}=2^{n+O\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)}$最大. 注意到当$x$很小时有$2^x=1+O(x)$. 于是由上述证明可得

$$\begin{aligned}SL(n!)&=\max_{2\leq p\leq n}p^{\alpha(p)}\\&=2^{\alpha(2)}=2^{\frac{n}{2-1}+O\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)}\\&=2^{n+O(\ln n)}\\&=\left[2\cdot 2^{O\left(\frac{\ln n}{n}\right)}\right]^n\end{aligned}$$

$$= \left[2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]^n.$$

于是完成了定理的证明.

我们对定理2.2.7的渐近式两边求极限就可得到

推论2.2.7 当$n \to \infty$时, 有极限式

$$\lim_{n\to\infty} [SL(n!)]^{\frac{1}{n}} = 2 \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(SL(n!))}{n} = \ln 2.$$

2.2.3 关于$\ln SL(n)$函数的均值

引理2.2.3 对任意正整数$n > 1$, 令$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 表示n的标准分解式, 如果$\alpha_1 \geq 2, \alpha_2 \geq 2, \cdots \alpha_s \geq 2$, 我们则称这样的$n$为无平方因子数. 令$A_2(x)$表示不超过$x$的无平方因子数的集合, 则有渐近公式

$$A_2(x) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})}{\zeta(3)} x^{\frac{1}{2}} + \frac{\zeta(\frac{2}{3})}{\zeta(2)} x^{\frac{1}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{6}} \exp\left(-C \log^{\frac{3}{5}} x (\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\right)\right), \text{(2-6)}$$

其中$C > 0$ 是常数.

引理2.2.4 p 是任意素数, k 是任意正整数. 则对任意实数$x \geq 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{\substack{pk \leq x \\ (p,\ k)=1}} \ln p = x \ln x + O(x).$$

证明: 根据素数定理的几个不同的形式, 我们有

$$\sum_{k \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1),$$

$$\sum_{k \leq x} \ln p = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

和

$$\sum_{k \leq x} \frac{\ln p}{p^2} = D + O\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

其中D是可计算的正常数.

由上述渐近公式可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{pk\le x\\(p,\ k)=1}}\ln p &= \sum_{p\le x}\ln p\sum_{\substack{k\le \frac{x}{p}\\(p,\ k)=1}}1\\ &= \sum_{p\le x}\ln p\left(\frac{x}{p}-\frac{x}{p^2}+O\left(1\right)\right)\\ &= x\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p}-x\sum_{p\le x}\frac{\ln p}{p^2}+O\left(\sum_{p\le x}\ln p\right)\\ &= x\ln x+O\left(x\right).\end{aligned}$$

这就完成了引理2.2.4的证明.

定理2.2.8　对任意实数$x>1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x}\ln SL(n)=x\ln x+O\left(x\right).$$

证明:　令$U(n)=\sum_{n\le x}\ln SL(n)$. 首先我们来估计$U(n)$的上界. 事实上, 根据F.Smarandache LCM 函数$SL(n)$ 的定义有: 对任意正整数n, $SL(n)\le n$ 和$\ln SL(n)\le\ln n$, 于是有

$$\sum_{n\le x}\ln SL(n)\le\sum_{n\le x}\ln n.$$

根据Euler求和公式, 我们立即得到

$$U(n)\le\sum_{n\le x}\ln n=x\ln x-x+O\left(\ln x\right)=x\ln x+O\left(x\right).\tag{2-7}$$

现在我们来估计$U(n)$的下界. 对任意正整数$n>1$, 令$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 表示n的标准分解式, 我们把$[1,\ n]$ 分成两个集合A 和B. A 表示$[1,\ n]$中满足$\alpha_i\ge 2\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$的所有正整数$n$. 即就是, A

表示$[1,\ n]$中的所有square-full数; B 表示$n \in [1,\ n]$中不属于集合A的其它正整数n. 于是可得

$$U(n) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} \ln SL(n) + \sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} \ln SL(n).$$

由引理2.2.3及集合A的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} \ln SL(n) &\le \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} \ln n \le \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} \ln x = \ln x \sum_{\substack{n\le x\\ n\in A}} 1\\ &= \ln x \cdot A_2(x) \ll \sqrt{x}\ln x. \end{aligned}\tag{2-8}$$

现在我们来估计集合B上的和式.

由于$SL(n)$=max$\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_s^{\alpha_s}\}$, 所以对任意$n \in B$, 一定存在一个素数$p$满足$p|n$且$p^2 \dagger n$. 因此, 根据$SL(n)$函数的定义, 我们有$SL(np) \ge p$. 由此我们立即可得

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} \ln SL(n) = \sum_{\substack{np\le x\\ (n,\ p)=1}} \ln SL(np) \ge \sum_{\substack{np\le x\\ (n,\ p)=1}} \ln p. \tag{2-9}$$

由引理2.2.4 及(2-9)有

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\in B}} \ln SL(n) \ge x\ln x + O\left(x\right). \tag{2-10}$$

结合(2-7)和(2-10)我们立即得到渐近公式

$$\sum_{n\le x} \ln SL(n) = x\ln x + O\left(x\right).$$

这就完成了定理的证明.

由此定理我们也可以得到下面的渐近公式, 即就是:

推论2.2.8 对任意实数$x > 1$, 我们有渐近公式

$$\sum_{n\le x} \ln S(n) = x\ln x + O(x),$$

其中$S(n)$ 表示 Smarandache函数.

2.2.4　关于$SL(n)$函数的猜想

考察和式

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}, \tag{2-11}$$

其中$\sum\limits_{d|n}$ 表示对n的所有正因子求和, 我们发现任何一个正整数$n>1$且$n\neq 36$都不能使(2-11)式成为整数. 于是我们提出以下:

猜想　除$n=1$, 36外, 没有任何其它正整数n, 使得(2-11)式成为一个整数.

即使不能证明它, 我们仍然相信这个猜想是正确的. 本节的主要目的是研究这个问题, 并且证明对于一些特殊的正整数n, 这个猜想是正确的. 即要证明下面的

定理2.2.9　设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是$n$的标准分解式(这里$p_1<p_2<\cdots<p_r$). 如果$\alpha_1=1$, 则上面的猜想是正确的.

证明: 对于任意正整数$n>1$, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为n 的标准分解式, 那么根据$SL(n)$的性质有

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_r^{\alpha_r}\}. \tag{2-12}$$

现在设$\alpha_1=1$且n满足

$$\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=m\quad \text{是一个正整数.}$$

设$n=p_1\cdot n_1$, 那么注意到对任意$d|n_1$且$d>1$, $SL(p_1\cdot d)=SL(d)$, 有

$$\begin{aligned} m &= \sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(p_1\cdot d)}\\ &= \sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|n_1}\frac{1}{SL(d)}+\frac{1}{p_1}-1=\sum_{d|n_1}\frac{2}{SL(d)}+\frac{1}{p_1}-1, \end{aligned}$$

或者

$$n_1\cdot m=\sum_{d|n_1}\frac{n_1}{SL(d)}+\frac{n_1\cdot(1-p_1)}{p_1}. \tag{2-13}$$

显然对于任意$d|n_1$, $\frac{n_1}{SL(d)}$ 和$n_1 \cdot m$是整数, 但是$\frac{n_1 \cdot (1-p_1)}{p_1}$ 不是整数, 与(2-13)矛盾. 于是, 如果$\alpha_1 = 1$, 猜想正确.

定理2.2.10 对任意整数$n > 1$, 如果$SL(n)$是一个素数, 则上面的猜想是正确的.

证明: 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$为$n$的标准分解式. 如果$SL(n)$是一个素数, 则$SL(n) = p_s$和$\alpha_s = 1$. 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s = n_1 \cdot p_s$. 于是如果(2-11)是一个整数$m$, 那么注意到对任意$d|n_1$，$SL(p_s \cdot d) = p_s$, 有

$$\begin{aligned} m &= \sum_{d|n} \frac{1}{SL(d)} = \sum_{d|n_1} \frac{1}{SL(d)} + \sum_{d|n_1} \frac{1}{SL(p_s \cdot d)} \\ &= \sum_{d|n_1} \frac{1}{SL(d)} + \sum_{d|n_1} \frac{1}{p_s} = \sum_{d|n_1} \frac{1}{SL(d)} + \frac{d(n_1)}{p_s}, \end{aligned} \quad (2\text{-}14)$$

这里$d(n_1)$表示n_1的Dirichlet除数函数. 显然对任意$d|n_1$, 有$(SL(d), p_s) = 1$. 于是从(2-14)可得

$$p_s \mid d(n_1) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_{s-1} + 1).$$

不失一般性, 假设$p_s \mid \alpha_i + 1$, $1 \le i \le s-1$. 此时有$\alpha_i + 1 \ge p_s$ 或$\alpha_i \ge p_s - 1$. 但是在这种情况下有$p_i^{\alpha_i} \ge p_i^{p_s - 1} \ge (1+1)^{p_s - 1} > p_s$, 与$SL(n) = p_s$矛盾. 于是就证明了定理2.2.10.

定理2.2.11 设p是一个素数且α为任意正整数. 如果$n = p^\alpha$, 则上面的猜想是正确的.

证明: 设p是一个素数且$n = p^\alpha$. 那么有

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{1}{SL(d)} &= \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{1}{SL(p^i)} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^\alpha} \\ &= \frac{1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha}{p^\alpha}. \end{aligned} \quad (2\text{-}15)$$

因为$\left(p^\alpha, 1 + p + p^2 + \cdots p^\alpha\right) = 1$, 于是(2-15)是一个整数是不可能的. 于是完成了定理的证明.

从定理2.2.11可得出下列的

推论2.2.11 如果n 为无平方因子数(即 $n > 1$, 且对任何素数$p|n \Longrightarrow p^2 \dagger n$), 则上面的猜想是正确的.

2.2.5　方程$\sum\limits_{d|n} S(d) = \sum\limits_{d|n} SL(d)$的可解性

本小节的主要目的是利用初等方法研究方程

$$\sum_{d|n} S(d) = \sum_{d|n} SL(d) \tag{2-16}$$

的可解性问题, 得到了该方程的所有正整数解, 并给出该方程解的渐近公式. 即就是下面的

定理2.2.12 方程$\sum\limits_{d|n} S(d) = \sum\limits_{d|n} SL(d)$有无穷多个正整数解, 分别是$n = 1$, $2^\alpha p_1 p_2 \cdots p_k$, 其中$k$ 是任意正整数, $\alpha = 0$, 1 或2, 且$2 < p_1 < \cdots < p_k$ 是各不相同的素数.

证明: 事实上, 由$S(n)$和$SL(n)$的定义可知$n = 1$是方程(2-16)的解. 如果$n > 1$, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_1 < p_2 < \cdots < p_k)$ 是n 的标准分解式. 则由$S(n)$ 和$SL(n)$的定义及性质, 有

$$S(n) = \max\{S(p_1^{\alpha_1}),\ S(\ p_2^{\alpha_2})\ \cdots,\ S(p_k^{\alpha_k})\} = S(p_i^{\alpha_i}) \leq \alpha_i p_i$$

和

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2},\ \cdots,\ p_k^{\alpha_k}\} = p_j^{\alpha_j},$$

显然有$p_j^{\alpha_j} \geq p_i^{\alpha_i} \geq \alpha_i p_i$. 因此, 对任意正整数$n > 1$, 不妨设$n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $(2 < p_1 < \cdots < p_k)$,下面将所有$n > 1$ 分为以下三种情况来讨论

(1) 当$\alpha = 0$, 1,

(a) 如果$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1$. 也就是说, $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 或$n = 2p_1 p_2 \cdots p_k$, 则对n的任意因子d, 有$S(d) = SL(d)$, 此时方程(2-16)成立.

(b) 如果至少有一个$\alpha_i \geq 2$, 则有$S(p_i^{\alpha_i}) \leq \alpha_i p_i$, $SL(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i}$. 显然方程(2-16)此时不成立.

(2) 当$\alpha=2$, $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=1$,

(c) 如果$p_1=3$, 即$n=4\cdot 3n_1\,(\,12\dagger n_1\,)$, 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|n} S(d)\\
=\ &\sum_{d|n_1} S(d)+\sum_{d|n_1} S(2d)+\sum_{d|n_1} S(4d)+\sum_{d|n_1} S(3d)+\sum_{d|n_1} S(6d)+\sum_{d|n_1} S(12d)\\
=\ &\sum_{d|n_1} S(d)+\left(2-1+\sum_{d|n_1} S(d)\right)+\left(4-1+\sum_{d|n_1} S(d)\right)+\\
&\left(3-1+\sum_{d|n_1} S(d)\right)+\left(3-1+\sum_{d|n_1} S(d)\right)+\left(4-1+\sum_{d|n_1} S(d)\right)\\
=\ &11+6\sum_{d|n_1} S(d),
\end{aligned}$$

同理可得$\sum\limits_{d|n} SL(d)=11+6\sum\limits_{d|n_1} SL(d)$, 所以有$\sum\limits_{d|n_1} S(d)=\sum\limits_{d|n_1} SL(d)$. 方程(2-16)此时成立.

(d) 如果$p_1>3$, 即$n=4\cdot n_1\,(\,4\dagger n_1\,)$, 有$\sum\limits_{d|n} S(d)=4+3\sum\limits_{d|n_1} S(d)$和$\sum\limits_{d|n} SL(d)=4+3\sum\limits_{d|n_1} SL(d)$, 此时方程(2-16)成立.

(3) 当$\alpha\geq 3$时, 则在方程(2-16)两边存在对应项满足$S(2^\alpha)\leq 2\alpha$, $SL(2^\alpha)=2^\alpha>2\alpha$, 此时方程(2-16)不成立.

综上所述, 方程(2-16)有无穷多个正整数解: $n=1$, $2^\alpha p_1p_2\cdots p_k$ $(\,\alpha=0,1$或者$2\,)$, 其中$2<p_1<\cdots<p_k$ 是不相同的素数. 这就完成了定理的证明.

2.3 关于$SL(n)$函数的新问题

问题2.1: 当$n>1$且$n\neq 36$时，和式$\sum\limits_{d|n}\dfrac{1}{SL(d)}$ 不可能为正整数.

问题2.2: 研究方程$\sum\limits_{d|n} SL(d)=\phi(n)$的可解性，并寻求该方程的所有正整数解.

第三章 Smarandache对偶函数$S^*(n)$

Smarandache 函数的对偶函数$S^*(n)$是一类非常重要的可乘函数, 它与Smarandache 函数$S(n)$有很多类似的性质. 本章主要给出了Smarandache 对偶函数的一些重要结论, 并提出了关于此函数的一些新问题. 这些重要研究成果对我们解决这些新的问题有很大的帮助.

3.1 引言

定义3.1 对任意正整数n, 著名的Smarandache对偶函数$S^*(n)$定义为最大的正整数m使得$m!|n$, 即$S^*(n)=\max\{m:\ m!|n,\ m\in N\}$.

定义3.2 对任意正整数n, $S^{**}(n)$定义为: 当$2\dagger n$时, $S^{**}(n)$为最大的正整数$2m-1$使得$(2m-1)!!\mid n$; 当$2\mid n$时, $S^{**}(n)$为最大的正整数$2m$使得$(2m)!!\mid n$.

下面给出函数$S^*(n)$的基本性质

性质3.1 当n为奇数时, $S^*(n)=1$, 当n为偶数时, $S^*(n)\geq 2$.

性质3.2 对任意的正整数k, 我们有

$$S^*\left((2k-1)!(2k+1)!\right)=q-1,$$

其中k是一个正整数, q是跟随$2k+1$的第一个素数.

性质3.3 当$Re(s)>1$时有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^s}=\zeta(s)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^s},$$

其中$\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ 是Riemann zeta-函数.

性质3.4 关于函数$S^*(n)$的均值有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}S^*(n)=(e-1)x+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

其中$e = 2.718281828459 \cdots$为常数.

3.2 Smarandache对偶函数$S^*(n)$的研究现状

本节给出了Smarandache对偶函数$S^*(n)$的一些均值性质, 以及包含此函数的一些特殊方程的解的问题.

3.2.1 关于Smarandache对偶函数$S^*(n)$的基本定理

定理3.2.1 对任意实数$s > 1$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(S^*(n))^k}{n^s} = \zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k - (n-1)^k}{(n!)^s}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S^*(n) n^s} = \zeta(s) \cdot \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)((n+1)!)^s}\right),$$

其中$\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 是Riemann zeta-函数.

注意到$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, 则

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta(s) = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

其中$\mu(n)$ 是Möbius 函数. 由定理3.2.1, 可以得到下面的

推论3.2.1 对任意正整数n, 有

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) S^*\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } n = m!,\ m\text{是正整数;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

推论3.2.2

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(n)}{n^s}\right)=e-1,$$

其中$e=2.718281828459\cdots$ 是常数.

由定理3.2.1 和Perron's 公式(参阅文献[7] 中的定理6.5.2), 也可以得到$S^*(n)$ 均值的渐近公式. 但是用初等方法, 则可得到更强的估计,即

定理3.2.2 对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\le x}S^*(n)=(e-1)x+O\left(\frac{\ln^2 x}{(\ln\ln x)^2}\right).$$

定理3.2.3 对于任意实数$s>1$, 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}$$

是收敛的, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^s}=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m+1)!!)^s}\right)+\zeta(s)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{((2m)!!)^s},$$

其中$\zeta(s)$是Riemann zeta-函数.

当$s=2,\ 4$时, 立即得到

推论3.2.3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^2}+\frac{\pi^2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^2}+\frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^{**}(n)}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m+1)!!)^4}+\frac{\pi^4}{45}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{((2m)!!)^4}+\frac{\pi^4}{96}.$$

定理3.2.4 对任意正整数n, 方程

$$\sum_{d|n}S^*(d)=n. \tag{3-1}$$

有且仅有$n=1$, 12两个正整数解.

定理3.2.5 方程$\sum_{d|n} S^*(d)=\omega(n)\Omega(n)$有且仅有以下三种形式的解

1. $n=p_1^\alpha p_2$或者$n=p_1p_2^\beta$.其中$2<p_1<p_2, \alpha\geq 1, \beta\geq 1$
2. $n=p_1^2p_2p_3$或者$n=p_1p_2^2p_3$或者$n=p_1p_2p_3^2$
3. $n=p_1p_2p_3p_4$, 其中$p_1<p_2<p_3<p_4$为奇素数.

3.2.2 方程$\sum_{d|n} S^*(d)=n$的可解性

目前有学者利用初等方法研究了方程

$$\sum_{d|n} S^*(d)=n.$$

的可解性, 并给出了满足该方程的所有正整数解. 这对我们研究有关对偶函数$S^*(n)$的新问题提供了十分有用的方法和思路.

定理3.2.6 方程

$$\sum_{d|n} S^*(d)=n. \tag{3-2}$$

有且仅有$n=1$, 12两个正整数解.

证明: 容易验证$n=1$满足方程(3-2). 现在假定$n>1$且满足(3-2)式, 下面分几种情况来讨论

(i) $n=2k+1$为奇数, 此时对任意$d|n$显然有$2!$不整除n, 所以$S^*(d)=1$. 当$n>1$且满足(3-2)式时应有

$$n=\sum_{d|n} S^*(d)=\sum_{d|n} 1=d(n), \tag{3-3}$$

其中$d(n)$表示Dirichlet除数函数. 但是当$n\geq 3$时有$n>d(n)$, (3-3)式显然是不成立的, 所以方程(3-2)没有大于1的奇数解.

(ii) $n=2\cdot m$, m为奇数. 容易验证$m=1$, 3, 5时n不满足(3-3)式. 于是可假定$m\geq 7$. 若$3\dagger m$且满足(3-3)式时应有

$$n \;=\; 2m=\sum_{d|n} S^*(d)=\sum_{d|m} S^*(d)+\sum_{d|m} S^*(2d)$$

$$= \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|m} 2 = 3d(m).$$

即$2m = 3d(m)$, 但当$m \geq 7$时容易验证$2m > 3d(m)$, 此时等式不成立.

若$3|m$且$n = 2m$满足(3-3)式, 则

$$\begin{aligned} n &= 2m = 6 \cdot \frac{m}{3} = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|m} S^*(d) + \sum_{d|m} S^*(2d) \\ &= \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(6d) + \sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(2d) \\ &\leq d(m) + \sum_{d|\frac{m}{3}} 3 + 3d\left(\frac{m}{3}\right) = d(m) + 6d\left(\frac{m}{3}\right). \end{aligned}$$

即

$$2m = \frac{m}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{m}{3} \leq d(m) + 6d\left(\frac{m}{3}\right).$$

此式当奇数$\dfrac{m}{3}$大于3时显然不成立. 而当$\dfrac{m}{3} = 3$即$n = 18$时, 可直接验证

$$\begin{aligned} \sum_{d|18} S^*(d) &= S^*(1) + S^*(2) + S^*(3) + S^*(6) + S^*(9) + S^*(18) \\ &= 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 = 10, \end{aligned}$$

此时(3-3)式不成立. 所以，$n = 2 \cdot m$ (m为奇数), 不是方程(3-2)的解.

(iii) $n = 2^2 \cdot m$, m为奇数. 容易验证$m = 1$时$n = 4$不满足(3-3)式. 而当$m = 3$即$n = 12$时, 有

$$\begin{aligned} \sum_{d|12} S^*(d) &= S^*(1) + S^*(2) + S^*(3) + S^*(4) + S^*(6) + S^*(12) \\ &= 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 3 = 12, \end{aligned}$$

因此$n = 12$满足方程(3-2). 若$m > 3$, 则当$3|m$时有$m \geq 9$, 此时若n满足(3-3), 则

$$\begin{aligned} n &= 2^2 m = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|m} S^*(d) + \sum_{d|m} S^*(2d) + \sum_{d|m} S^*(4d) \\ &= \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(6d) + \sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(2d) + \sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(12d) + \sum_{d|\frac{m}{3}} S^*(6d) \\ &\leq d(m) + 4\sum_{d|\frac{m}{3}} 3 = d(m) + 12d\left(\frac{m}{3}\right), \end{aligned}$$

即

$$4m = m + 9 \cdot \frac{m}{3} \leq d(m) + 12d\left(\frac{m}{3}\right),$$

根据除数函数的性质容易验证此式当奇数$\frac{m}{3} > 3$时不可能成立. 而当$\frac{m}{3} = 3$即$n = 36$时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{d|36} S^*(d) &= S^*(1) + S^*(2) + S^*(3) + S^*(4) + S^*(6) + S^*(12) + S^*(9) \\ &\quad + S^*(18) + S^*(36) \\ &= 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 3 + 1 + 3 + 3 = 19 \neq 36.\end{aligned}$$

当$n = 2^2 \cdot m$, m为奇数且$3 \dagger m$时, 若n满足(3-3)式, 则应有

$$\begin{aligned}n &= 4m = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{d|m} S^*(d) + \sum_{d|m} S^*(2d) + \sum_{d|m} S^*(4d) \\ &= \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|m} 2 + \sum_{d|m} 2 = 5d(m),\end{aligned}$$

但$4m = 5d(m)$是不成立的. 所以，当$n = 2^2 \cdot m$, m为奇数时只有$n = 12$满足(3-3)式.

(iv) $n = 2^\alpha \cdot m$, m为奇数, $\alpha \geq 3$. 此时若$m = 1$, 则$n = 2^\alpha$, 这时

$$\begin{aligned}n &= 2^\alpha = \sum_{d|2^\alpha} S^*(d) = 1 + \sum_{d|2^{\alpha-1}} S^*(2d) \\ &= 1 + 2d(2^{\alpha-1}) = 2\alpha + 1 \neq 2^\alpha.\end{aligned}$$

当$m = 3$时有

$$\begin{aligned}n &= 2^\alpha 3 = \sum_{d|2^\alpha 3} S^*(d) = \sum_{d|2^\alpha} S^*(d) + \sum_{d|2^\alpha} S^*(3d) \\ &= 2\alpha + 1 + 1 + 3\sum_{d|2^\alpha} 1 - 3 = 1 + 2d(2^{\alpha-1}) = 3\alpha + 2,\end{aligned}$$

显然$2^\alpha 3 \neq 3\alpha + 2$. 因此$n = 2^\alpha 3$不满足(3-3)式. 现在不妨设

$$S^*(n) = S^*(2^\alpha m) = u,$$

其中奇数$m > 3$.

若$u=2$, 则当n满足(3-3)式时应有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha m=\sum_{d|n} S^*(d)=\sum_{d|m} S^*(d)+\sum_{d|\frac{n}{2}} S^*(2d) \\ &= \sum_{d|m} 1+\sum_{d|\frac{n}{2}} 2=d(m)+d\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

即$2^\alpha m=d(m)+d\left(2^{\alpha-1}m\right)$. 但当$m>3$时

$$2^\alpha m>d(m)+d\left(2^{\alpha-1}m\right).$$

若$u=3$, 则$3|m$. 于是当n满足(3-3)式时有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha m=\sum_{d|n} S^*(d)=\sum_{d|m} S^*(d)+\sum_{d|\frac{n}{2}} S^*(2d) \\ &\leq \sum_{d|m} 1+\sum_{d|\frac{n}{6}} 3+\sum_{d|\frac{n}{6}} 3=d(m)+6d\left(\frac{n}{6}\right). \end{aligned}$$

即$2^\alpha m\leq d(m)+6d\left(\frac{n}{6}\right)$. 但当$m\geq 3$时

$$n=2^\alpha m>d(m)+6d\left(\frac{n}{6}\right).$$

若$u\geq 4$, 则$3|m$. 由于$u!|n=2^\alpha m$, 所以

$$\alpha\geq\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{u}{2^i}\right]. \tag{3-4}$$

于是当$u=4$且n满足(3-3)式时应有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha m=\sum_{d|n} S^*(d)=\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d|m} S^*(2^i d) \\ &\leq \sum_{d|m} 1+\sum_{d|m} 3+(\alpha-1)\sum_{d|m} 4 \\ &\leq 4d(m)+4(\alpha-1)d(m), \end{aligned}$$

即$2^\alpha m\leq 4\alpha d(m)$. 但当$\alpha\geq 3$, $m>3$时这一不等式是不成立的.

当$u \geq 5$时, 一定有$3|m$及$5|m$, 即奇数$m \geq 15$, 此时容易推出

$$15d(m) \leq 4m. \tag{3-5}$$

因而当n满足(3-3)式时应有

$$\begin{aligned} n &= 2^\alpha m = \sum_{d|n} S^*(d) = \sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{d|m} S^*(2^i d) \\ &\leq \sum_{d|m} 1 + \sum_{d|m} 3 + (\alpha - 1)\sum_{d|m} u \\ &\leq 4d(m) + u(\alpha - 1)d(m) \leq (u\alpha - 1)d(m). \end{aligned}$$

即

$$2^\alpha m \leq (u\alpha - 1)d(m).$$

由(3-4)式知

$$\alpha \geq \frac{u-1}{2} + \frac{u-1}{4} = \frac{3u-3}{4}.$$

于是结合上式及(3-5)式可得

$$2^\alpha 15 \leq 4(u\alpha - 1) \leq 4\left[\alpha\left(\frac{4\alpha}{3} + 1\right) - 1\right].$$

但当$\alpha \geq 3$时这一不等式是不成立的.

结合以上四种情况就完成了定理的证明.

3.2.3 方程$\sum_{d|n} S^*(d) = \phi(n)$的可解性

在本小节, 我们使用初等方法研究了下面函数方程的可解性. 即求方程

$$\sum_{d|n} S^*(d) = \phi(n). \tag{3-6}$$

的所有正整数解, 其中$S^*(n) = \max\{m:\ m \in N,\ m!|n\}$. 显然存在无穷多个正整数$n$使得$\sum_{d|n} S^*(d) < \phi(n)$, 例如当$n = p^\alpha$为素数方幂时，就有

此不等式成立. 另外, 也存在一些正整数n使得$\sum\limits_{d|n} S^*(d) > \phi(n)$. 那么有多少正整数$n$使得(3-6)式成立? 具体地说也就是下面的:

定理3.2.7 对任意正整数n, 方程$\sum\limits_{d|n} S^*(d) = \phi(n)$成立当且仅当$n =$ 1, 3, 14, 84.

证明: 我们将n分为两种情况来讨论:

(1) n不能被2整除.

对于函数$S^*(n) = \max\{m: \ m \in N, \ m!|n\}$, 我们很容易推出当$n$为奇数时有$S^*(n) = 1$, 这时$\sum\limits_{d|n} S^*(d)$就是$n$的所有正因子的个数, 即$\sum\limits_{d|n} S^*(d) = d(n)$, 则方程(3-6)可以写为$d(n) = \phi(n)$.

(A) 当$n = 1$时, $d(n) = \phi(n) = 1$, 则$n = 1$是方程(3-6)的解.

(B) 当$n > 1$时, 设$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准分解式, 其中$p_i$是奇素数, 于是有: $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$, 则方程(3-6)可以写为

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) \\ = \ & p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1). \end{aligned} \qquad (3\text{-}7)$$

我们先来证明一个简单的不等式: $p^{\alpha - 1}(p - 1) \geq \alpha + 1$, 且等号成立当且仅当$\alpha = 1, p = 3$, 其中$p \geq 3$.

这是因为:

(i) $\alpha = 1$, $p - 1 \geq 2 = 1 + \alpha$且等号成立当且仅当$p = 3$;

(ii) $\alpha = 2$, $p(p - 1) \geq 2p \geq 6 > 1 + \alpha$;

(iii) $\alpha > 2$, $p^{\alpha - 1}(p - 1) > p^{\alpha - 1} \geq 3^{\alpha - 1} > \alpha + 1$.

现在我们再来讨论方程(3-6)的可解性问题:

(a) $k = 1$, 即$n = p^\alpha$. 方程(3-7)可写为$(\alpha + 1) = p^{\alpha - 1}(p - 1)$, 因为前面已经证明了$p^{\alpha - 1}(p - 1) \geq \alpha + 1$且等号成立当且仅当$\alpha = 1$, $p = 3$, 所以只有$n = 3$是解, 其它情况时$\sum\limits_{d|n} S^*(d) > \phi(n)$.

(b) $k \geq 2$, 因为$n \geq 15$, 故必存在$p_i \geq 5$, 有$p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1) > \alpha_i + 1$, $i = 1, \ 2, \ \cdots, \ k$. 则有

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) < p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1),$$

即$\sum\limits_{d|n} S^*(d) > \phi(n)$. 因此我们推出当$n$不能被2整除时, 方程(3-6)的解为$n = 1,\ 3$.

2) n能被2整除, 即就是n为偶数. 这时为了方便讨论, 我们再将n进行分类:

(A) $n = 2^\alpha$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = 1 + 2\alpha$, $\phi(n) = 2^{\alpha-1}$.

当$\alpha = 1$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = 3$, $\phi(n) = 1$, 不是方程的解.

当$\alpha \geq 2$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = 1 + 2\alpha$是奇数, 而$\phi(n) = 2^{\alpha-1}$是偶数, 也不满足方程(3-6). 也就是说形如$n = 2^\alpha$的整数不是方程(3-6)的解.

(B) $n = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时, 其中$k \geq 1$.

(a) 若$n = 2p_1p_2\cdots p_k$, 则

$$\sum_{d|n} S^*(d) = \begin{cases} 3 \times 2^k, & p_1 \geq 5; \\ 2^{k+1} + 3 \times 2^{k-1}, & p_1 = 3. \end{cases}$$

$\phi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_k - 1)$.

(i) $k = 1$时, $\phi(n) = p_1 - 1$, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = \begin{cases} 6, & p_1 \geq 5; \\ 7, & p_1 = 3. \end{cases}$

要使方程(3-6)成立当且仅当$p_1 = 7$, 即$n = 14$.

(ii) 当$p_1 > 3$且$k \geq 2$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = 3 \times 2^k$,

$$\phi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_k - 1) > 4^k = 2^k 2^k > 3 \times 2^k = \sum_{d|n} s^*(d)$$

不满足方程(3-6).

(iii) $p_1 = 3$, 当$k = 2$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = 14$, $\phi(n) = 2(p_2 - 1)$, 要使方程(3-6)成立就要有$p_2 = 8$, 这于p是素数矛盾, 则$n = 2 \times 3 \times p_2$不是方程(3-6)的解.

当$k \geq 3$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = 7 \times 2^{k-1}$, 而

$$\phi(n) \;=\; 2(p_2 - 1)(p_3 - 1)\cdots(p_k - 1) > 2 \times 4^{k-1} = 2^{k-1}2^k$$

$$> \quad 7\times 2^{k-1}=\sum_{d|n}S^*(d),$$

则n不满足方程(3-6).

由上面的讨论我们得到形如$n=2p_1p_2\cdots p_k$的整数只有$n=14$是方程(3-6)的解.

(b) 当$n=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 中至少有一个$\alpha_i\geq 2$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$, 则有

$$\phi(n)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1),$$

$$\sum_{d|n}S^*(d)=\begin{cases}3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k), & p_1\geq 5;\\ (3+4\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k), & p_1=3.\end{cases}$$

(i) 当$p_1\geq 5$时, 对任意$j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$都有$p^{\alpha_j-1}(p-1)\geq\alpha_j+1$, 又因存在一个$\alpha_i\geq 2$, 其中$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$, $p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\geq 4\times 5^{\alpha_i-1}>3(1+\alpha_i)$, 则$\sum\limits_{d|n}S^*(d)>\phi(n)$不满足方程(3-6).

(ii) 当$p_1=3$时, 若存在一个$\alpha_i\geq 2$且$i=2,\ 3,\ \cdots,\ k$时,

$$\phi(n)=2\times 3^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1),$$

$$\sum_{d|n}S^*(d)=(3+4\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k),$$

因$\alpha_i\geq 2$, 且我们已经知道有$p_i^{\alpha_i-2}(p_i-1)>\alpha_i+1$, 及$2p_i3^{\alpha_1-1}>(3+4\alpha_1)$, 则$\sum\limits_{d|n}S^*(d)>\phi(n)$, 即不满足方程(3-6).

若当$\alpha_1\geq 2$时, 且对任意$j=2,\ \cdots,\ k$都有$\alpha_j=1$，则$\phi(n)=3^{\alpha_1-1}2(p_2-1)\cdots(p_k-1)$,

$\sum\limits_{d|n}S^*(d)=(3+4\alpha_1)2^{k-1}$, 因为$2^k|\phi(n)$, 但是$2^k\dagger\sum\limits_{d|n}S^*(d)$, 所以有$\sum\limits_{d|n}S^*(d)\neq\phi(n)$, 即$n$不满足方程(3-6).

于是$n=2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 不是方程(3-6)的解.

(C) $n=2^\alpha p^{\alpha_1}$, 其中$\alpha\geq 2$.

(a) $p=3$时, $n=2^\alpha 3^{\alpha_1}$,

$$\phi(n)=2^\alpha 3^{\alpha_1-1},\ \sum_{d|n}S^*(d)=1+2\alpha+4\alpha\alpha_1-\alpha_1,$$

因为$\alpha \geq 2$, 所以$4|\phi(n)$, 要使方程(3-6)成立, 就应该也有$4|\sum_{d|n} S^*(d)$, 即$4|1+2\alpha+4\alpha\alpha_1-\alpha_1$, 则$4|1+2\alpha-\alpha_1$, 可以推出$\alpha_1$为奇数.

当$\alpha_1 \geq 5$时, $\sum_{d|n} S^*(d) < 4(1+\alpha)(1+\alpha_1) < 2^\alpha 3^{\alpha_1-1} = \phi(n)$, 此时方程(3-6)不成立, 则要使得方程(3-6)成立α_1只可能为$1, 3$.

当$\alpha_1 = 3$时, $n = 2^\alpha 3^3$,

$$\sum_{d|n} S^*(d) = 14\alpha - 2 < 9 \times 2^\alpha = \phi(n),$$

也不满足方程(3-6).

当$\alpha_1 = 1$时, $n = 2^\alpha 3$,

$$\sum_{d|n} S^*(d) = 6\alpha \neq 2^\alpha = \phi(n),$$

则也不满足方程(3-6).

(b) $p \geq 5$时, 因为$p \geq 5$, 所以当$\alpha_1 \geq 2$时有$p^{\alpha_1-1} > (1+\alpha_1)$,

$$\sum_{d|n} S^*(d) = (1+\alpha_1)(1+2\alpha) < 2^{\alpha+1}p^{\alpha_1-1} \leq 2^{\alpha-1}p^{\alpha_1-1}(p-1) = \phi(n),$$

则不满足方程(3-6).

当$\alpha_1 = 1$时, $\sum_{d|n} S^*(d) = 2(1+2\alpha)$, $\phi(n) = 2^{\alpha-1}(p-1)$, $4|\phi(n)$, 但是$4 \dagger \sum_{d|n} S^*(d)$, 则$\sum_{d|n} S^*(d) \neq \phi(n)$则不满足方程(3-6).

由上面的分析证明我们得出形如$n = 2^\alpha p^{\alpha_1}$且$\alpha \geq 2$的整数不是方程(3-6)的解.

(D) $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$时, 其中$\alpha \geq 2,\ k \geq 2,\ \alpha_k \geq 2$，

$$\phi(n) = 2^{\alpha-1}p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1),$$

$$\sum_{d|n} S^*(d) < (1+\alpha_k)p_k(1+\alpha)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_k).$$

(a) 当$k \geq 3$时, 我们已经知道$p^{\alpha-1}(p-1) \geq \alpha+1$且等号成立当且仅当$\alpha = 1,\ p = 3$, 其中$p \geq 3$.

当$\alpha \geq 3$时有$2^{\alpha-1} \geq 1+\alpha$,

当$\alpha = 2$时, 因为$k \geq 3$, 则必存在$p_i \geq 5$，$i = 1, 2, \cdots, k-1$, 有$2^{\alpha-1}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) > (1+\alpha)(1+\alpha_i)$, 因为当$\alpha_i = 1$时, $2(p_i-1) \geq 8 > 6 = (1+\alpha)(1+\alpha_i)$, 当$\alpha_i \geq 2$时, $2p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1) \geq 3(1+\alpha_i) = (1+\alpha)(1+\alpha_i)$. 则有

$$\begin{aligned}&2^{\alpha-1}p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}\\ > \ &(1+\alpha)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_{k-1}).\end{aligned} \tag{3-8}$$

再来比较$p_k(1+\alpha_k)^2$与$p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)$的关系：

(i) $\alpha_k = 2$时, 当$p_k \geq 11$时, $p_k(1+\alpha_k)^2 < p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)$, 再结合此不等式有$\sum\limits_{d|n} S^*(d) < \phi(n)$, 不满足方程(3-6). 当$p_k = 7$时, 因$k \geq 3$, 故$n = 2^\alpha 3^{\alpha_1}5^{\alpha_2}7^2$, $\phi(n) = 2^{\alpha-1}3^{\alpha_1-1}5^{\alpha_2-1}7\times 6\times 2\times 4$

$$\sum_{d|n} S^*(d) < 11\times(1+\alpha)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\times 3 < \phi(n),$$

不满足方程(3-6).

(ii) $\alpha_k \geq 3$时, 因为$p_k \geq 5$, 所以

$$p_k^{\alpha_k-2}(p_k-1) \geq 4\times 5^{\alpha_k-2} > (1+\alpha_k)^2,$$

结合此不等式有$\sum\limits_{d|n} S^*(d) < \phi(n)$不满足方程(3-6).

(b) 当$k = 2$时, $n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,

(i) 当$p_1 \neq 3$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) < 3(1+\alpha)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$, 因为$p_1 \geq 5$, 所以$2^{\alpha-1}p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) > (1+\alpha)(1+\alpha_1)$, 且$p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) > 7^{\alpha_2-1}(7-1) > 3(1+\alpha_2)$, 所以我们也能得到结论: $\sum\limits_{d|n} S^*(d) < \phi(n)$不满足方程(3-6).

(ii) 当$p_1 = 3$时, $n = 2^\alpha 3^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) < 7(1+\alpha)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$,

$$\phi(n) = 2^\alpha 3^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1).$$

因为$\alpha \geq 2$, 故有$2^\alpha > (1+\alpha)$.

当$\alpha_2 \geq 3$时有$3^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \geq 4\times 5^{\alpha_2-1}3^{\alpha_1-1} > 7(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)$, 则

$$\phi(n) = 2^\alpha 3^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) > 7(1+\alpha)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = \sum_{d|n} S^*(d).$$

故不满足方程(3-6).

当$\alpha_2=2$, 且$\alpha_1\geq 2$时,

$$\begin{aligned}\phi(n) &= 2^{\alpha}3^{\alpha_1-1}p_2(p_2-1)>20\times 2^{\alpha}3^{\alpha_1-1}\\ &> 7\times 3\times(1+\alpha)(1+\alpha_1)=\sum_{d|n}S^*(n),\end{aligned}$$

不满足方程(3-6).

当$\alpha_2=2$, 且$\alpha_1=1$，$\alpha\geq 3$时, $n=2^{\alpha}3p_2^2$

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}S^*(d) &< 5(1+\alpha)(1+1)(1+2)=15(1+\alpha)\times 2<20\times 2^{\alpha-1}\times 2\\ &< 2^{\alpha-1}(3-1)p_2(p_2-1)=\phi(n).\end{aligned}$$

当$\alpha_2=2$, 且$\alpha_1=1$, $\alpha=2$时, $n=2^23p_2^2$

$$\sum_{d|n}S^*(d)<4(1+2)(1+1)(1+2)=2\times 36<4\times 20<2\times 2p_2(p_2-1)=\phi(n).$$

于是我们得到结论: $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中$\alpha\geq 2$, $k\geq 2$, $\alpha_k\geq 2$不是方程(3-6)的解.

(E) $n=2^{\alpha}p_1p_2\cdots p_{k-1}p_k$时, 其中$\alpha\geq 2$, $k\geq 2$.

$$\phi(n)=2^{\alpha-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

(a) $p_1>3$时, $\sum_{d|n}S^*(d)=2^k+\alpha 2^{k+1}=2^k(2\alpha+1)$,

$$\begin{aligned}\phi(n) &= 2^{\alpha-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)>2^{\alpha+1}2^k2^{k-2}\\ &> 2^{\alpha+1}2^k>2^k(2\alpha+1)=\sum_{d|n}S^*(d).\end{aligned}$$

(b) $p_1=3$时, 即$n=2^{\alpha}\times 3\times p_2\cdots p_{k-1}p_k$,

$$\phi(n)=2^{\alpha}(p_2-1)\cdots(p_k-1)>2^{k-1}2^{\alpha+1}.$$

$$\sum_{d|n}S^*(d)\leq 2^k+2^k\alpha+3\times 2^{k-1}\times 2+5(\alpha-2)2^{k-1}=2^{k-1}(7\alpha-2).$$

(i) 当$\alpha\geq 4$时, $2^{\alpha+1}>(7\alpha-2)$, 则$\phi(n)>\sum_{d|n}S^*(d)$ 不满足方程(3-6).

(ii) 当$\alpha=2$时, $\phi(n)=2^2(p_2-1)\cdots(p_k-1)\geq 4\times 2^{k-1}2^{k-1}$,

$$\sum_{d|n}S^*(d)=2^k+2^{k+1}+3\times 2^k=12\times 2^{k-1}.$$

当$k\geq 3$时, $\phi(n)>\sum\limits_{d|n}S^*(d)$ 不满足方程(3-6).

当$k=2$时, 即$n=2^2\times 3p_2$, $\sum\limits_{d|n}S^*(d)=24$, $\phi(n)=4(p_2-1)$, 只有当$p_2=7$时, 即$n=48$才使方程成立, 其它情况都不满足方程(3-6).

(iii) 当$\alpha=3$时, $n=2^3\times 3\times p_2\cdots p_{k-1}p_k$

若$p_2=5$, 则$\phi(n)=2^3\times 4\times(p_3-1)\cdots(p_k-1)$, $\sum\limits_{d|n}S^*(d)=37\times 2^{k-2}$. 此时$2^{k+3}|\phi(n)$, 而$2^{k+3}\dagger\sum\limits_{d|n}S^*(d)$, 所以不满足方程(3-6).

若$p_2\geq 7$, 则$\phi(n)=2^3(p_2-1)\cdots(p_k-1)$, $\sum\limits_{d|n}S^*(d)=18\times 2^{k-1}$, 此时$2^{k+2}|\phi(n)$, 但$2^{k+2}\dagger\sum\limits_{d|n}S^*(d)$, 所以也不满足方程(3-6).

于是形如$n=2^\alpha p_1p_2\cdots p_{k-1}p_k(\alpha\geq 2,k\geq 2)$的整数只有$n=84$是方程(3-6)的解.

(F) $n=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}p_k$时, 其中$\alpha\geq 2$, $k\geq 2$, 且α_1, α_2, $\cdots$, α_k不全小于1.

设p_i为其对应的$\alpha_i\geq 2$中最大者, 则

$$\phi(n)=2^{\alpha-1}p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)(p_{i+1}-1)\cdots(p_k-1),$$

$$\sum_{d|n}S^*(d)<4p_k(1+\alpha)(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_{k-1}).$$

当$p_i\neq 3$且$\alpha_i\neq 2$时, 我们有$p_i^{\alpha_i-2}(p_i-1)>(1+\alpha_i)$, 则可以将$n$分类:

(a) $\alpha_i=2$, $p_i=3$时, $\phi(n)=2^\alpha 3(p_2-1)\cdots(p_k-1)$.

$$\sum_{d|n}S^*(d)<8\times 2^{k-1}3\times(1+\alpha)=24\times 2^{k-1}(1+\alpha).$$

(i) 当$\alpha=2$时, $\sum\limits_{d|n}S^*(d)=19\times 2^{k-1}$, 因为$3\mid\phi(n)$，但$3\dagger\sum\limits_{d|n}S^*(d)$, 故不满足方程(3-6).

(ii) 当$\alpha \geq 3$且$k \geq 3$时,

$$\phi(n) \geq 2^{\alpha}3 \times 4 \times 6^{k-2} > 8 \times 3(1+\alpha)2^{k-1} > \sum_{d|n} S^*(d).$$

(iii) 当$\alpha \geq 3$, $k=2$时, 即$n = 2^{\alpha}3^2 p_2$, $\phi(n) = 2^{\alpha}3(p_2 - 1)$.

当$p_2 \geq 7$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) < 4(1+\alpha)(1+2)(1+1) = 24(1+\alpha) < \phi(n)$, 不满足方程(3-6);

当$p_2 = 5$, 且$\alpha \geq 4$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) < 6(1+\alpha)(1+2)(1+1) < 2^{\alpha} \times 12 = \phi(n)$, 不满足方程(3-6);

当$p_2 = 5$, 且$\alpha = 3$时, $\sum\limits_{d|n} S^*(d) = 60 \neq \phi(n)$, 不满足方程(3-6).

(b) 当$p_i \geq 5$或者当$p_i = 3$时$\alpha_i \geq 3$, 已知有$p_i^{\alpha_i - 2}(p_i - 1) > (1+\alpha_i)$, 则有

$$\begin{aligned} & p^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_i^{\alpha_i - 2}(p_i - 1)(p_{i+1} - 1) \cdots (p_{k-1} - 1) \\ > \ & (1+\alpha_1) \cdots (1+\alpha_{k-1}). \end{aligned} \tag{3-9}$$

且有(i) 当$\alpha \geq 4$时, $4(1+\alpha)p_k \leq 2^{\alpha-1}p_i(p_k - 1)$, 结合不等式(3-9)就有$\phi(n) > \sum\limits_{d|n} S^*(d)$, 不满足方程(3-6).

(ii) 当$\alpha = 2$时, $n = 2^2 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} p_{i+1} \cdots p_k$, 此时有

$$\sum_{d|n} S^*(d) < 4(1+2)(1+\alpha_1) \cdots (1+\alpha_{k-1}) \times 2.$$

因有$2^{\alpha-1}p_i(p_k - 1) = 2p_i(p_k - 1) \geq 4 \times (1+2) \times 2$, 再结合不等式(3-9)就有$\phi(n) > \sum\limits_{d|n} S^*(n)$ 不满足方程(3-6).

(iii) 当$\alpha = 3$时, 即$n = 2^3 p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} p_{i+1} \cdots p_k$,

$$\phi(n) = 2^2 p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \cdots p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)(p_{i+1} - 1) \cdots (p_k - 1),$$

$$\sum_{d|n} S^*(d) < 6 \times 4(1+\alpha_1) \cdots (1+\alpha_i)(1+\alpha_{i+1}) \cdots (1+\alpha_{k-1}) \times 2.$$

因为$2^{\alpha-1}p_i(p_k - 1) \geq 4 \times 3 \times 4 = 6(1+3) \times 2$, 再结合不等式(3-9), 可得$\phi(n) > \sum\limits_{d|n} S^*(d)$, 不满足方程(3-6).

这样也就得到当$n = 2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}p_k$, 其中$\alpha \geq 2$, $k \geq 2$, 且α_1, α_2, $\cdots$, α_k不全小于1时, n不是方程(3-6)的解.

于是完成了定理的证明.

3.3 关于Smarandache对偶函数$S^*(n)$的新问题

问题3.1: 研究方程$\sum_{d|n} S^*(d) = \phi(n)$的可解性, 并寻求该方程的所有正整数解.

问题3.2: 研究$\prod_{d|n} S^*(d)$的计算问题, 并给出一个确切的计算公式.

第四章　新的Smarandache函数

4.1　引言

定义4.1　函数$Z(n)$ 定义为最小的正整数k 使得$n \leq k(k+1)/2$, 即

$$Z(n) = \min\{k:\ n \leq k(k+1)/2\}.$$

它是罗马尼亚著名数论专家Jozsef Sandor教授引入的.

定义4.2　对任意正整数n, 函数$SM(n)$定义为: 当$n = 1$ 时, $SM(1) = 1$; 当$n > 1$ 且$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 为n 的标准分解式时,

$$SM(n) = \max\{\alpha_1 p_1,\ \alpha_2 p_2,\ \alpha_3 p_3,\ \cdots,\ \alpha_k p_k\}.$$

容易验证函数$SM(n)$ 是Smarandache可乘函数.

定义4.3　对任意的正整数n, 我们定义Smarandache幂函数$SP(n)$为满足$n|m^m$的最小正整数m , 其中n和m有相同的素因子. 即就是,

$$SP(n) = \min\left\{m:\ n|m^m,\ m \in \mathrm{N},\ \prod_{p|n} p = \prod_{p|m} p\right\}.$$

4.2　新的Smarandache函数的研究现状

4.2.1　新的Smarandache函数的基本定理

定理4.2.1 设$k \geq 2$为给定的整数, 则对任意实数$x > 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n \leq x} S\left(Z(n)\right) = \frac{\pi^2}{18} \cdot \frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot (2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln^i \sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中c_i $(i = 2,\ 3, \cdots,\ k)$为可计算的常数.

特别地, 当$k = 1$时有下面更简单的

推论4.2.1 对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} S\left(Z(n)\right) = \frac{\pi^2}{18}\cdot\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\ln\sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

定理4.2.2 对任意正整数n, 令$P(n)$ 表示n的最大素因子, 则对任意实数$x>1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x} \left(SM(n)-P(n)\right)^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta-函数.

定理4.2.3 对任意正整数n, 方程

$$\sum_{d|n} SM(d) = n$$

成立当且仅当$n=1,\ 28$.

定理4.2.4 对任意正整数m 和$k>1$, 方程:

$$SP(n_1)+SP(n_2)+\cdots+SP(n_k) = m\cdot SP(n_1+n_2+\cdots+n_k),$$

有无穷多组正整数解$(n_1,n_2,\cdots,n_k)$.

4.2.2 包含$SM(n)$函数的方程

本节的主要目的是研究一个包含$SM(n)$函数的方程的可解性, 即证明下面的:

定理4.2.5 对任意正整数n, 方程

$$\sum_{d|n} SM(d) = n \tag{4-1}$$

成立当且仅当$n=1,\ 28$.

证明: 首先, 证明几种特殊情况

(i)当$n=1$时,$\sum\limits_{d|n} SM(d)=SM(1)=1$, 得$n=1$是方程(4-1)的解.

(ii) 当$n=p^{\alpha}$为素数方幂时(4-1)式不成立. 事实上这时若(4-1)式成立, 则由函数$SM(n)$ 的定义可得

$$\sum_{d|n} SM(d)=\sum_{d|p^{\alpha}} SM(d)=1+p+2p+\cdots+\alpha p=p^{\alpha}. \tag{4-2}$$

显然(4-2)式右边是p的倍数, 而左边不是p的倍数, 矛盾. 所以当n为素数方幂时(4-1)式不成立.

(iii) 当$n>1$且n的最小素因子的方幂为1时, 若$n=p_1p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=p_1n_1$且满足(4-1)式, 则由结论(ii)知$k\geq 2$. 于是由$SM(n)$的定义可得

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} SM(d) &= \sum_{d|n_1} SM(d)+\sum_{d|n_1} SM(p_1d)\\ &= 2\sum_{d|n_1} SM(d)+p_1-1=p_1n_1.\end{aligned} \tag{4-3}$$

显然(4-3)式两边的奇偶性相反, 矛盾. 此时(4-1)式不成立.

由结论(iii)立刻得到: 如果n为无平方因子数, 则n不可能满足(4-1)式.

现在证明一般情况. 假定整数$n>1$满足方程(4-1), 由结论(ii)及(iii)知n至少有两个不同的素因子, 而且n的最小素因子的方幂大于1. 于是可设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $\alpha_1>1$, $k\geq 2$. 设$SM(n)=\alpha p$. 下面分几种情况进行讨论

(A) $\alpha=1$. 此时p必定为n的最大素因子, 令$n=n_1p$, 注意到当$d|n_1$时有$SM(d)\leq p-1$, 于是由$\sum\limits_{d|n} SM(d)=n$可得

$$\begin{aligned} n_1p &= n=\sum_{d|n_1p} SM(d)=\sum_{d|n_1} SM(d)+\sum_{d|n_1} SM(dp)\\ &= \sum_{d|n_1} SM(d)+\sum_{d|n_1} p\leq 1+\sum_{\substack{d|n_1\\ d>1}}(p-1)+pd(n_1)\\ &= 2+(2p-1)d(n_1)-p,\end{aligned} \tag{4-4}$$

或者

$$n_1+1<2d(n_1), \tag{4-5}$$

其中$d(n_1)$为Dirichlet除数函数. (4-5)式当$n_1 \geq 7$时显然不成立. 于是$2 \leq n_1 \leq 6$. 又由于n_1的最小素因子的方幂大于1, 所以$n_1 = 4$. 从而$n = n_1 p = 4p$, $p > 3$. 此时由

$$\begin{aligned} 4p &= \sum_{d|4p} SM(d) = SM(1) + SM(2) + SM(4) \\ &\quad + SM(p) + SM(2p) + SM(4p) \\ &= 1 + 2 + 4 + 3p, \end{aligned}$$

立刻推出$p = 7$即$n = 28$.

(B) $SM(n) = \alpha p$且$\alpha > 1$. 此时设$n = n_1 p^\alpha, (n_1, p) = 1$. 若$n$满足(4-1)式, 则有

$$n = p^\alpha n_1 = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{d|n_1} SM(p^i d).$$

当$1 < n_1 < 8$时, 我们来分析方程(4-1)的情况.

(a)若$n_1 = 2$, 即$n = 2p^\alpha (p > 2)$, 由(iii)的讨论知, $n = 2p^\alpha$不是方程(4-1)的解;

(b)若$n_1 = 3$时, $n = 3p^\alpha$. 由于$(n_1, p) = 1$, 有$p \neq 3$.

若$p = 2, n = 3 \cdot 2^\alpha$满足方程(4-1), 即

$$\sum_{d|3\cdot 2^\alpha} SM(d) = \sum_{d|2^\alpha} SM(d) + \sum_{d|2^\alpha} SM(3d) = 2\sum_{d|2^\alpha} SM(d) + 3 = 3 \cdot 2^\alpha,$$

上式中$2\sum\limits_{d|2^\alpha} SM(d) + 3$是奇数, 而$3 \cdot 2^\alpha$是偶数. 所以, $n = 3 \cdot 2^\alpha$不是方程(4-1)的解;

若$p > 3$, 即$n = 3 \cdot p^\alpha$满足方程(4-1), 则n最小素因子的指数为1, 由(iii)知, $n = 3 \cdot p^\alpha$ 不是方程(4-1)的解.

因此$n = 3 \cdot p^\alpha (p \neq 3)$不是方程(4-1)的解.

(c)当$n_1 = 4$时, $n = 4 \cdot p^\alpha (p \geq 3)$, 有

$$\sum_{d|4\cdot p^\alpha} SM(d) = \sum_{d|p^\alpha} SM(d) + \sum_{d|p^\alpha} SM(2d) + \sum_{d|p^\alpha} SM(4d),$$

若$p = 3$, 即$n = 4 \cdot 3^\alpha$满足方程(4-1), 则

$$\sum_{d|4\cdot 3^\alpha} SM(d) = \sum_{d|3^\alpha} SM(d) + \sum_{d|3^\alpha} SM(2d) + \sum_{d|3^\alpha} SM(4d)$$

$$= 3\sum_{\substack{d|3^\alpha\\ d>1}} SM(d) + 12 = 4\cdot 3^\alpha,$$

由于$3^2 \mid 3\sum\limits_{\substack{d|3^\alpha\\ d>1}} SM(d)$, 而且$3^2 \mid 4\cdot 3^\alpha$, 从而$3^2 \mid 12$. 这是不可能的.

若$p>3$, 即$n=4\cdot p^\alpha$满足方程(4-1), 则

$$\begin{aligned}\sum_{d|4\cdot p^\alpha} SM(d) &= \sum_{d|p^\alpha} SM(d) + \sum_{d|p^\alpha} SM(2d) + \sum_{d|p^\alpha} SM(4d)\\ &= 3\sum_{d|p^\alpha} SM(d) + 8 = \frac{3}{2}\alpha(\alpha+1)p + 11 = 4\cdot p^\alpha,\end{aligned}$$

即

$$4\cdot 3^\alpha - \frac{3}{2}\alpha(\alpha+1)p + 11 = 0.$$

现在固定α,取$f(x) = 4\cdot x^\alpha - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)x + 11$, 当$x\geq 3$时, $f(x)$是递增函数, 即

$$f(x) \geq f(3) = 4\cdot 3^\alpha - \frac{3}{2}\alpha(\alpha+1) + 11 = g(\alpha).$$

又由于$\alpha\geq 2$时, $g(\alpha)$是关于α的递增函数. 则有

$$f(x) \geq f(3) = g(\alpha) \geq g(2) > 0,$$

所以, 当$x\geq 3$时, $f(x)=0$无解. 从而得到$p>3$时, 方程(4-1)无解.

(d)当$n_1=5$时,有$n=5\cdot p^\alpha (p\neq 5)$.

若$p>5$, 则由(iii)知, $n=5\cdot p^\alpha$不是方程(4-1)的解;

若$p=2$, 由于

$$\sum_{d|5\cdot 2^\alpha} SM(d) = \sum_{d|2^\alpha} SM(d) + \sum_{d|2^\alpha} SM(5d) = 2\sum_{\substack{d|2^\alpha\\ d>1}} SM(d) + 10 = 5\cdot 2^\alpha,$$

这里$2^2 \mid 2\sum\limits_{\substack{d|2^\alpha\\ d>1}} \overline{S}(d)$, 又$2^2 \mid 5\cdot 2^\alpha$, 从而有$2^2 \mid 10$, 这是不可能的. 故$n = 5\cdot 2^\alpha$不满足方程(4-1);

若$p=3$, 由于

$$\sum_{d|5\cdot 3^\alpha} SM(d) = \sum_{d|3^\alpha} SM(d) + \sum_{d|3^\alpha} SM(5d) = 2\sum_{d|3^\alpha} SM(d) + 6,$$

这里$2\sum\limits_{d|3^\alpha} SM(d)+6$是偶数, 而$5\cdot 3^\alpha$是奇数. 因此, $n=5\cdot 3^\alpha$不满足方程(4-1).

(e)当$n_1=6$时$n=2\cdot 3\cdot p^\alpha$, 由(iii)的讨论知, n不满足方程(4-1).

(f)当$n_1=7$时, 有$n=7\cdot p^\alpha (p\neq 7)$.

若$p>7$, 则由(iii)知, $n=7\cdot p^\alpha$不是方程(4-1)的解;

若$p=2$, 此时必有$\alpha\geq 4$.由于

$$\sum_{d|7\cdot 2^\alpha} SM(d)=\sum_{d|2^\alpha} SM(d)+\sum_{d|2^\alpha} SM(7d)=2\sum_{d|2^\alpha} SM(d)+15,$$

这里$2\sum\limits_{d|2^\alpha} SM(d)+15$是奇数, 而$n=7\cdot 2^\alpha$是偶数. 故$n=7\cdot 2^\alpha$不满足方程(4-1);

若$p=3$, 由于

$$\sum_{d|7\cdot 3^\alpha} SM(d)=\sum_{d|3^\alpha} SM(d)+\sum_{d|3^\alpha} SM(7d)=2\sum_{\substack{d|3^\alpha\\ d>1}} SM(d)+13,$$

上式中$3\mid 2\sum\limits_{\substack{d|3^\alpha\\ d>1}} SM(d)$,且$3\mid 7\cdot 3^\alpha$, 如果满足方程(4-1), 必有$3\dagger 13$,矛盾. 于是$n=7\cdot 3^\alpha$ 也不是方程(4-1)的解;

若$p=5$, 由于

$$\sum_{d|7\cdot 5^\alpha} SM(d)=\sum_{d|5^\alpha} SM(d)+\sum_{d|5^\alpha} SM(7d)=2\sum_{d|5^\alpha} SM(d)+8,$$

上式中$2\sum\limits_{d|5^\alpha} SM(d)+8$是偶数, 而$7\cdot 5^\alpha$是奇数. 于是$n=7\cdot 5^\alpha$ 也不是方程(4-1)的解.

(g)当$n_1\geq 8$时, 有$n=n_1\cdot p^\alpha$, 且$p^\alpha>\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}p$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{d|n_1\cdot p^\alpha} SM(d) &< SM(p^\alpha)d(n_1p^\alpha)=\alpha(\alpha+1)pd(n_1)\\ &\leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}pn_1<p^\alpha n_1=n,\end{aligned}$$

则当$n_1\geq 8$时, $n=n_1p^\alpha$也不是方程(4-1)的解.

综合以上所有情况可得方程(4-1)有且仅有两个解, 即$n=1,28$. 于是完成了定理的证明.

4.2.3 关于方程$\sum_{d|n} SM(d) = \phi(n)$的解

在本小节中我们将使用初等方法来研究方程

$$\sum_{d|n} SM(d) = \phi(n) \tag{4-6}$$

的所有正整数解, 即就是证明了:

引理4.2.1 对任意正整数n, 若$n = p_1 p^{\alpha} (\alpha \geq 1, p_1 < p)$, 则$n$ 不是方程(4-6)的解.

证明: (1) 不妨设$\alpha = 1$, $p_1 = 2$, $n = 2p$ 满足方程(4-6). 根据函数$SM(n)$和$\phi(n)$的定义, 我们有

$$\sum_{d|n} SM(d) = 3 + 2p = \phi(n) = p - 1,$$

则有$p = 4$, 这是一个矛盾.

若$p_1 > 2$, $n = p_1 p$满足方程(4-6). 此时有

$$\sum_{d|n} SM(d) = 1 + p_1 + 2p = \phi(n) = (p_1 - 1)(p - 1),$$

因此

$$p_1(p - 1) = 2p_1 + 2p.$$

我们容易得到$p_1 | 2p$, 但是$(p_1, 2) = 1$, 于是$p_1 | p$, 这是不可能的.

(2) 若$\alpha > 1, p_1 \geq 2$, $n = p_1 p^{\alpha} = n_1 p^{\alpha}$ 满足(4-6). 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} SM(d) &= \sum_{d|n_1} SM(d) + \sum_{1 \leq i \leq \alpha} \sum_{d|n_1} SM(d \cdot p^i) \\ &= 1 + p_1 + 2(p + 2p + \cdot +) \\ &= \phi(n) = (p_1 - 1)p^{\alpha - 1}(p - 1).\end{aligned}$$

当$p_1 \neq 2$时, $p | \phi(n)$, $p | 2(p + 2p + \cdot + \alpha p)$, 于是$p | p_1 + 1$, 这是不可能的.

当$p_1 = 2$时, $\sum_{d|n} SM(d)$ 是奇数, 但是$\phi(n)$ 是偶数. 此时方程(4-6)不成立.

有上述讨论我们得知$n = p_1 p^\alpha (\alpha \geq 1, p_1 < p)$ 不是方程(4-6)的解.

引理4.2.2 对任意奇数n, 则有:

$\dfrac{\phi(n)}{d(n)} \geq 4$ 当且仅当$n \neq 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21$.

证明: 参阅文献[55].

定理4.2.6 对任意正整数n, 方程(4-6)有且仅有一个解$n = 1$.

证明: (I) 当$n = 1$时, $\sum\limits_{d|n} SM(d) = SM(1) = 1 = \phi(1)$, 可见$n = 1$是方程(4-6)的解.

(II) 当$n = p^\alpha$, $\alpha \geq 2$时, 方程(4-6)不成立.

事实上, 若方程(4-6)成立, 则有

$$\sum_{d|p^\alpha} SM(d) = 1 + p + 2p + \cdots + \alpha p = \phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1),$$

其中$p|\phi(n)$, $p|\sum\limits_{d|p^\alpha} SM(d)$, 于是有$p|1$, 这是不可能的.

若$\alpha = 1$, $n = p$满足方程(4-6), 则有

$$\sum_{d|p} SM(d) = 1 + p = \phi(n) = p - 1.$$

很显然,

$$\sum_{d|p} SM(d) > \phi(n).$$

因此$n = p^\alpha$不是方程(4-6)的解.

(III) 当$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p^\alpha = n_1 p^\alpha$, $((n_1, p) = 1)$ $\alpha_1 \geq 1, k \geq 2$时, $SM(n) = \alpha p$, 则

$$\sum_{d|n} SM(d) < SM(p^\alpha) d(n_1 p^\alpha) = \alpha(\alpha+1) p d(n_1).$$

$$\phi(n) = p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1).$$

(A)若$\alpha = 1$, $\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} \geq \dfrac{2}{3}$ $(n_1 \neq 2, n_1 \neq 6)$, 我们有$\sum\limits_{d|n} SM(d) < \phi(n)$.

当$n_1 = 2$时, 由引理4.2.1可知$n = 2p$ 不是方程(4-6)的解.

若$n_1 = 6$ 时, 我们有

$$\sum_{d|6p} SM(d) = 9 + 4p,$$

这是奇数, 然而$\phi(n)$ 是偶数, 因此$n = 6p$ 不满足方程(4-6).

(B) 若$\alpha > 1$, $SM(n) = \alpha p$.

首先, 我们分下面四种情况来讨论:

(i) 当$p \neq 2$时, $\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} \geq 4$, 则有$\alpha(\alpha+1)pd(n_1) \leq p^{\alpha-1}(p-1)\phi(n_1)$, 因此$\sum\limits_{d|n} SM(d) < \phi(n)$.

(ii) 当n_1是奇数时, $p \neq 2$.

(1) 若$p \geq 7$, $\alpha \geq 2$, 或者$p \geq 5$, $\alpha \geq 3$, 我们有$\alpha(\alpha+1)p \leq p^{\alpha-1}(p-1)$, 因此$\sum\limits_{d|n} SM(d) < \phi(n)$.

(2) 若$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} < 4$, 由引理4.2.1及引理4.2.2和上述讨论我们立即得到$n = 3p^\alpha, 5p^\alpha, 7p^\alpha, 9p^\alpha, 15p^\alpha, 21p^\alpha$都不是方程(4-6)的解.

(3) 若$p = 5$, $\alpha = 2$ 并且$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} < 4$, 由上述讨论可得$n = 3 \cdot 5^2, 3^2 \cdot 5^2, 7 \cdot 5^2, 3 \cdot 7 \cdot 5^2$ 都不是方程(4-6)的解.

(iii) 若n_1是偶数, $p \neq 2$.

若$2^2 \mid n_1$, $\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} \geq 1$, 当$p \geq 7$, $\alpha \geq 2$, 或者$p \geq 5$, $\alpha \geq 3$时, 则有$\alpha(\alpha+1)p \leq p^{\alpha-1}(p-1)$, 因此$\sum\limits_{d|n} SM(d) < \phi(n)$. 当$p = 5$, $\alpha = 2$时, 我们容易得到$n = 2^2 \cdot 7 \cdot 5^2$, $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ 或者$n = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5^2$ 不是方程(4-6)的解.

若$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} < 1$, $n_1 = 2^2 \cdot 3$, 则有$n = 2^2 \cdot 3 \cdot p^\alpha$.

(iv) 若$p = 2$, $\alpha \geq 4$ 并且$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} > 4$, 则有$\sum\limits_{d|n} SM(d) < \phi(n)$.

若$\alpha = 2, 3$, 我们容易得到$n = 3 \cdot 2^2$, $n = 3 \cdot 2^3$ 或者$n = 5 \cdot 2^3$ 都不是方程(4-6)的解.

若$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} < 4$, 由(II)及引理4.2.2可得$n = 2^\alpha$, $3 \cdot 2^\alpha$, $5 \cdot 2^\alpha$, $7 \cdot 2^\alpha$, $9 \cdot 2^\alpha$, $15 \cdot 2^\alpha$,$21 \cdot 2^\alpha$不满足方程(4-6).

现在我们来考虑其它情况:

(1) 若$2 \| n_1$, $n = 2p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p^\alpha = 2n_1 (k \geq 2)$ 满足方程(4-6), 则有

$$\sum_{d|n} SM(d) = 2\sum_{\substack{d|n_1 \\ d>1}} SM(d) + 3 = \phi(n)$$

$$= \; p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)p^{\alpha-1}(p-1).$$

在上述方程中, $2\sum\limits_{\substack{d|n_1\\d>1}}SM(d)+3$ 是奇数, 但是$\phi(n)$ 是偶数, 因此$n=2p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}p^{\alpha}(k\geq 2)$ 不是方程(4-6)的解.

(2) 若$2^2\|n_1$, $n_1=2^2p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $(k\geq 2)$.

① 当$p=3,\alpha\geq 5$时, 我们很容易得到$\alpha(\alpha+1)p<p^{\alpha-1}(p-1)$, 因此可得$\sum\limits_{d|n}SM(d)<\phi(n)$, 此时方程(4-6)无解.

若$\alpha=2$, $n=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, 我们容易证明$n=2^2\cdot 3^2\cdot 5$ 不是方程(4-6)的解.

若$\alpha=3, n=2^2{\cdot}3^3{\cdot}5$ 或者$n=2^2{\cdot}3^3{\cdot}7$, 我们也可以证明$n=2^2{\cdot}3^3{\cdot}5$ 或$n=2^2\cdot 3^3\cdot 7$ 都不是方程(4-6)的解.

若$\alpha=4$ 并且$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)}<4$, $n=2^2\cdot 3^4\cdot 5, n=2^2\cdot 3^4\cdot 7$ 或$n=2^2\cdot 3^4\cdot 11$, 我们容易证明$n=2^2\cdot 3^4\cdot 5, n=2^2\cdot 3^4\cdot 7$ 或者$n=2^2\cdot 3^4\cdot 11$ 都不是方程(4-6)的解.

② 当$p\neq 3$时, 由(B) (iii) 可得$n=2^2\cdot 3\cdot p^{\alpha}$. 由于

$$\sum_{d|2^2\cdot 3\cdot p^{\alpha}}SM(d)=6\sum_{\substack{d|p^{\alpha}\\d>1}}SM(d)+17=\phi(n)=4p^{\alpha-1}(p-1),$$

以及$6\sum\limits_{\substack{d|p^{\alpha}\\d>1}}SM(d)+17$ 是奇数, $\phi(n)$ 是偶数, 因此$n=2^2\cdot 3\cdot p^{\alpha}$ 不是方程(4-6)的解.

(3) 若$2^{\alpha}\mid n_1$ $(\alpha\geq 3)$.

① 当$p=3,\alpha\geq 5$, 则有$\alpha(\alpha+1)p<p^{\alpha-1}(p-1)$ 和$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)}\geq 1$, 于是$\sum\limits_{d|n}SM(d)<\phi(n)$, 因此方程(4-6)此时无解.

当$\alpha=2$ 并且$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)}<4$时, 我们容易得到$n=2^3\cdot 3^2, n=2^3\cdot 3^2\cdot 5$ 不是方程(4-6)的解.

当$\alpha=3$并且$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)}<4$时, 我们容易证明$n=2^3\cdot 3^3\cdot 5$, $2^3\cdot 3^3\cdot 7$, $2^4\cdot 3^3$, $2^4\cdot 3^3\cdot 5$都不是方程(4-6)的解.

当$\alpha = 4$ 并且$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} < 4$时, 很显然, $n = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$, $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$, $2^4 \cdot 3^4$, $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$, $2^5 \cdot 3^4$都不满足方程(4-6).

② 当$p = 5, \alpha = 2$, $\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} \geq 4$时, 由(B) (i) 可知它们不是方程(4-6)的解.

当$\dfrac{\phi(n_1)}{d(n_1)} < 4$ 时, 我们容易证明$n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 7 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$, $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ 都不是方程(4-6)的解.

综上所述, 方程(4-6)有且仅有一个正整数解$n = 1$.

这就完成了定理的证明.

4.2.4 包含$SP(n)$函数的方程

在本小节我们将利用初等方法来研究包含Smarandache 幂函数$SP(n)$的方程的解数问题, 证明如下:

定理4.2.7 对任意正整数m 和$k > 1$, 方程

$$SP(n_1) + SP(n_2) + \cdots + SP(n_k) = m \cdot SP(n_1 + n_2 + \cdots + n_k), \tag{4-7}$$

有无穷多组正整数解$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$.

证明: 当m 和k 为奇数时, 且$k \geq 3$. 令$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$ 是m 的标准分解式, 则对足够大的素数P, 由著名的三素数定理, 存在素数q_1, q_2, $\cdots$, q_s 满足方程:

$$p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} \cdots p_s^{\alpha_s+1} P = q_1 + q_2 + \cdots + q_k. \tag{4-8}$$

在方程(4-7)中取$n_i = q_i$ ($i = 1, 2, \cdots, k$), 由$SP(n)$ 的性质和方程(4-8)我们立即得到

$$\begin{aligned}
& SP(q_1) + SP(q_2) + \cdots + SP(q_k) \\
= \ & q_1 + q_2 + \cdots + q_k = p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} \cdots p_s^{\alpha_s+1} P \\
= \ & p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \cdot p_1 p_2 \cdots p_s P = m \cdot p_1 p_2 \cdots p_s P \\
= \ & m \cdot SP(p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} \cdots p_s^{\alpha_s+1} P) \\
= \ & m \cdot SP(q_1 + q_2 + \cdots + q_k).
\end{aligned}$$

即就是, 当m和k为奇数时, 方程成立.

当m为奇数, k为偶数时, 我们分两种情况讨论:

(a) $k=2$. 令$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示m 的标准分解式, 则对足够大的素数P, 由著名的陈氏定理有

$$2p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_s^{\alpha_s+1}P=q_1+q_2$$

或者

$$2p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_s^{\alpha_s+1}P=q_1+q_2q_3.$$

其中q_1, q_2和q_3 是素数. 我们都有

$$\begin{aligned}SP(q_1)+SP(q_2) &= q_1+q_2=2p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_s^{\alpha_s+1}P\\ &= m\cdot 2p_1p_2\cdots p_sP\\ &= m\cdot SP(2p_1p_2\cdots p_sP)\\ &= m\cdot SP(2p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_s^{\alpha_s+1}P)\\ &= m\cdot SP(q_1+q_2)\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}SP(q_1)+SP(q_2q_3) &= q_1+q_2q_3=2p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_s^{\alpha_s+1}P\\ &= m\cdot 2p_1p_2\cdots p_sP\\ &= m\cdot SP(2p_1p_2\cdots p_sP)\\ &= m\cdot SP(2p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_s^{\alpha_s+1}P)\\ &= m\cdot SP(q_1+q_2q_3).\end{aligned}$$

(b) $k=2k_1$, $k_1\geq 2$. 根据三素数定理有

$$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}P=q_1+q_2+\cdots+q_{k-1}+2.$$

使用上述同样的方法我们可以证明定理是正确的.

下面, 我们再来讨论m为任意偶数时方程(4-7)的解的问题. 令$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示m 的标准分解式, 我们分为三种情况讨论:

(I) 当$k=2$时, 则由陈氏定理, 我们有$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}P$. 即就是,

$$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}P=p_1'+q_1'$$

或者

$$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}P = p_1' + q_1'q_2',$$

其中P是足够大的素数, p_1', $q_i'(i=1,2)$ 是素数.

(II)当$k=2k_1$ $(k_1>1)$时, 则有

$$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}P = q_1 + q_2 + \cdots + q_{k-1} + 3,$$

其中P 是足够大的素数, q_i $(i=1,2,\cdots,k-1)$是素数.
因此有

$$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}P - 3 = q_1 + q_2 + \cdots + q_{k-1},$$

满足三素数定理, 方程成立.

(III) 当$k=2k_1+1$ $(k_1>1)$时, 则有

$$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}P = q_1 + q_2 + \cdots + q_{k-1} + 2$$

和

$$p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\cdots p_k^{\alpha_k+1}P - 2 = q_1 + q_2 + \cdots + q_{k-1}.$$

由于$k-1$ 是偶数, 同上(II). 此时方程成立.

由于P 是足够大的素数, 因此对$\forall m \in Z^+$和$k>1$, 方程有无穷多组正整数解$(n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k)$. 这就完成了定理的证明.

4.2.5 包含函数$SP(n)$及$\phi(n)$的方程

在本小节中, 我们将利用初等方法来研究方程$SP(n^k)=\phi(n)$的可解性问题, 并且给出$k=$ 1, 2, 3时该方程的所有正整数解. 即就是, 我们将证明下面的:

定理4.2.8 *方程$SP(n)=\phi(n)$仅有4个正整数解: $n=$ 1, 4, 8, 18.*

证明: 很显然$n=1$是方程$SP(n)=\phi(n)$的解. 下面我们分两种情况来讨论方程的其它解:

1. $n>1$ 是奇数.

此时, 根据Smarandache幂函数$SP(n)$ 的定义可知$SP(n)$ 也是奇数, 但是$\phi(n)$ 是偶数, 因此$SP(n)\neq\phi(n)$.

2. $n>1$ 是偶数.

(1) $n=2^\alpha$, $\alpha\geq 1$. 容易验证$n=2$ 不是$SP(n)=\phi(n)$的解, $n=4$, 8是方程$SP(n)=\phi(n)$的解. 当$\alpha\geq 4$, $(\alpha-2)2^{\alpha-2}\geq\alpha$, $2^\alpha \mid (2^{\alpha-2})^{2^{\alpha-2}}$时, 即$n \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$, 于是$SP(n)\leq\dfrac{\phi(n)}{2}<\phi(n)$.

(2) $n = 2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中$p_i$是奇素数, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$, $\alpha \geq 2$, $k \geq 1$. 此时,

$$\phi(n) = 2^{\alpha-1}p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

当$n \dagger (\phi(n))^{\phi(n)}$时, 根据Smarandache 幂函数$SP(n)$的定义我们可知$SP(n) \neq \phi(n)$.

当$n \mid (\phi(n))^{\phi(n)}$时, 根据$\phi(n)$的性质有$\alpha_k \geq 2$.

(i) 对于2^{α}. $\alpha \geq 2$, 则有

$$\begin{aligned}(\alpha-1)\frac{\phi(n)}{2} &\geq (\alpha-1)2^{\alpha-1}p_k^{\alpha_k-1}\frac{p_k-1}{2} \geq (\alpha-1)\cdot 2\cdot 3 \geq 6(\alpha-1)\\ &\geq 3\alpha > \alpha,\end{aligned}$$

于是可得$2^{\alpha} \mid (2^{(\alpha-1)})^{\frac{\phi(n)}{2}}$. 因此$2^{\alpha} \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$.

(ii)对于$p_i^{\alpha_i} \mid n$. 若$\alpha_i = 1$, 由于

$$\frac{\phi(n)}{2} \geq 2^{\alpha-1}p_k^{\alpha_k-1}\frac{p_k-1}{2} \geq 2\cdot 3 = 6 > 1$$

其中$p_i \mid (\phi(n))^{\phi(n)}$ 即$p_i \mid \frac{\phi(n)}{2}$, 我们推出$p_i \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$.

若$\alpha_i \geq 2$,

$$\begin{aligned}(\alpha_i-1)\frac{\phi(n)}{2} &\geq (\alpha_i-1)2^{\alpha-1}p_i^{\alpha_i-1}\frac{p_i-1}{2}\\ &\geq (\alpha_i-1)\cdot 2\cdot 3 \geq 6(\alpha_i-1) \geq 3\alpha_i > \alpha_i,\end{aligned}$$

可得$p_i^{\alpha_i} \mid (p_i^{(\alpha_i-1)})^{\frac{\phi(n)}{2}}$. 因此$p_i^{\alpha_i} \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$. 所以, 对任意$p_i^{\alpha_i} \mid n$, $p_i^{\alpha_i} \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$.

结合(i) 和(ii), 我们立即得到当$n \mid (\phi(n))^{\phi(n)}$时, 则有$n \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$. 因此$SP(n) \leq \dfrac{\phi(n)}{2} < \phi(n)$.

(3) $n = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中$p_i$ 是奇素数, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$, $k \geq 1$. 这时,

$$\phi(n) = p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1).$$

当$n \dagger (\phi(n))^{\phi(n)}$时, 根据Smarandache 幂函数$SP(n)$ 的定义可知$SP(n) \neq \phi(n)$.

当$n \mid (\phi(n))^{\phi(n)}$时, 由$\phi(n)$的性质, 我们有$\alpha_k \geq 2$.

(i) $k \geq 2$. 我们将证明$n \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$.

一方面, 显然有, $2 \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$. 另一方面, $\forall p_i^{\alpha_i} \mid n$, 当$\alpha_i = 1$时,

$$\frac{\phi(n)}{2} \geq p_k^{\alpha_k - 1}(p_i - 1)\frac{p_k - 1}{2} \geq 3 \cdot 2 = 6 > 1$$

其中$p_i \mid (\phi(n))^{\phi(n)}$ 即$p_i \mid \frac{\phi(n)}{2}$, 我们可以推出$p_i \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$. 当$\alpha_i \geq 2$时,

$$\begin{aligned}(\alpha_i - 1)\frac{\phi(n)}{2} &\geq (\alpha_i - 1)p_k^{\alpha_k - 1}(p_1 - 1)\frac{p_k - 1}{2} \geq (\alpha_i - 1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \\ &\geq 20(\alpha_i - 1) \geq 10\alpha_i > \alpha_i,\end{aligned}$$

即$p_i^{\alpha_i} \mid (p_i^{(\alpha_i - 1)})^{\frac{\phi(n)}{2}}$. 因此$p_i^{\alpha_i} \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$. 于是有, $n \mid (\frac{\phi(n)}{2})^{\frac{\phi(n)}{2}}$, 即$SP(n) \leq \dfrac{\phi(n)}{2} < \phi(n)$.

(ii) $k = 1$. 此时有, $n = 2p_1^{\alpha_1}$, $\alpha_1 \geq 2$, $\phi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1)$.

$(ii)'$ $p_1 \geq 5$, 由于$\alpha_1 \geq 2$,

$$\begin{aligned}(\alpha_1 - 1)\frac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}} &= (\alpha_1 - 1)p_1^{\alpha_1 - 1}2 \geq (\alpha_1 - 1) \cdot 5 \cdot 2 \\ &\geq 10(\alpha_1 - 1) \geq 5\alpha_1 > \alpha_1,\end{aligned}$$

即$p_1^{\alpha_1} \mid (p_1^{(\alpha_1 - 1)})^{\frac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}}}$. 因此$p_1^{\alpha_1} \mid (\frac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}})^{\frac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}}}$. 很显然, $2 \mid (\frac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}})^{\frac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}}}$. 于是有, $n \mid (\frac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}})^{\frac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}}}$, 即就是$SP(n) \leq \dfrac{\phi(n)}{\frac{p_1 - 1}{2}} < \phi(n)$.

$(ii)''$ $p_1 = 3$, 即$n = 2 \cdot 3^{\alpha_1}$.

$\alpha_1 = 1$, $\phi(n) = \phi(6) = 2$, $SP(n) = SP(6) = 6$, 因此$SP(n) \neq \phi(n)$.

$\alpha_1 = 2$, $\phi(n) = \phi(18) = 6$, $SP(n) = SP(18) = 6$, 因此$SP(n) = \phi(n)$.

$\alpha_1 \geq 3$, $(\frac{\phi(n)}{3})^{\frac{\phi(n)}{3}} = (2 \cdot 3^{\alpha_1 - 2})^{2 \cdot 3^{\alpha_1 - 2}}$, 因此$n \mid (\frac{\phi(n)}{3})^{\frac{\phi(n)}{3}}$, 即$SP(n) \leq \dfrac{\phi(n)}{3} < \phi(n)$.

结合(1), (2) 和(3), 我们可得当n是偶数时, 满足方程$SP(n) = \phi(n)$的解为$n =$ 4, 8, 18.

综上所述, 我们完成了定理4.2.8的证明.

使用同样的方法我们可以证明下面两个定理：

定理4.2.9 *方程$SP(n^2) = \phi(n)$ 仅有3个正整数解: $n =$ 1, 8, 18.*

定理4.2.10 *方程$SP(n^3) = \phi(n)$ 仅有3个正整数解: $n =$ 1, 16, 18.*

猜想: 一般地, 对任意给定的正整数$k \geq 4$, 我们猜测方程$SP(n^k) = \phi(n)$ 有有限个正整数解.

4.3 关于Smarandache函数的新问题

问题4.1: 当$n > 1$且$n \neq 24$时, 和式$\sum_{d|n} \frac{1}{SM(d)}$ 不可能为正整数.

问题4.2: 研究方程$\sum_{d|n} SM(d) = \phi(n)$的可解性, 并寻求该方程的所有正整数解.

问题4.3: 研究$Z(n)$ 的均值性质, 并给出$\sum_{n \leq x} Z(n)$ 的渐近公式.

问题4.4: 对任意正整数m 和$k > 1$, 我们猜测方程:

$$m \cdot (SP(n_1) + SP(n_2) + \cdots + SP(n_k)) = SP(n_1 + n_2 + \cdots + n_k).$$

有无穷组正整数解$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$.

第五章　关于SPAC(n)函数

5.1　引言

定义5.1　对任意正整数n, 我们定义著名的Smarandache素数可加补数SPAC(n)为满足$n+k$是素数的最小正整数k.

定义5.2　对任意正整数n, 我们定义

$$A_n = \{\mathrm{SPAC}(1) + \mathrm{SPAC}(2) + \cdots + \mathrm{SPAC}(n)\}/n.$$

定义5.3　对任意正整数n, 我们定义最小的素数可加补数为满足$n+k$是素数, 且$|k|$为最小的数k.

5.2　SPAC(n)函数的研究现状

5.2.1　关于Smarandache素数可加补数SPAC(n)

定理5.2.1　*存在任意大的正整数k, 使得*

$$k,\ k-1,\ k-2,\ k-3,\ \cdots,\ 2,\ 1,\ 0$$

包含于SPAC(n).

证明:　令k为任意大的正整数, 且$n > k+1$. 假设P是使得$P > n!+n$的最小素数. 很显然$P-1, P-2, \cdots, P-k, \cdots, n!+n, \cdots, n!+2$都是合数. 现在我们考虑$k+1$ 个正整数:

$$p-k,\ p-k+1,\ p-k+2,\ \cdots,\ p-1,\ p.$$

这些数的Smarandache素数可加补数分别是

$$\mathrm{SPAC}(p-k) = k,\ \mathrm{SPAC}(p-k-1) = k-1,\ \cdots,$$
$$\mathrm{SPAC}(p-1) = 1,\ \mathrm{SPAC}(p) = 0.$$

注意到k, $k-1$, $k-2$, $\cdots$, 1, 0 包含于SPAC(n). 这就完成了定理的证明.

5.2.2 Smarandache素数可加补数SPAC(n)的渐近公式

引理5.2.1 设n为任意正整数, 则当n较大时在区间$[n-n^{\frac{7}{12}}, n]$及$[n, n+n^{\frac{7}{12}}]$中一定包含一个素数. 即就是存在素数p及q使得

$$n-n^{\frac{7}{12}} \leq p \leq n$$

及

$$n < q \leq n+n^{\frac{7}{12}}.$$

引理5.2.2 设$\pi(x)$表示不超过x的所有素数的个数, 则有渐近公式

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+\mathrm{O}\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

定理5.2.2 对任意正整数n, 我们有估计式

$$A_n=\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n}\mathrm{SPAC}(a) \geq \frac{1}{2}\ln n+\mathrm{O}(1).$$

证明: 首先对任意充分大的正整数n, 设$2=p_1<p_2<p_3<\cdots<p_m \leq n$表示区间$[1, n]$中的所有素数. 于是由SPAC($a$)的定义可知在区间$(p_i, p_{i+1}]$中所有整数$a$的素数可加补数之和为

$$\begin{aligned}\sum_{p_i<a\leq p_{i+1}}\mathrm{SPAC}(a) &= p_{i+1}-p_i-1+p_{i+1}-p_i-2+\cdots+1+0\\ &= \frac{(p_{i+1}-p_i)(p_{i+1}-p_i-1)}{2}.\end{aligned}$$

注意到SPAC(1) = 1, 所以由上式我们可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\leq n}\mathrm{SPAC}(a) &= 1+\sum_{p_{i+1}\leq n}\sum_{p_i<a\leq p_{i+1}}\mathrm{SPAC}(a)+\sum_{p_m<a\leq n}\mathrm{SPAC}(a)\\ &\geq \sum_{p_{i+1}\leq n}\frac{(p_{i+1}-p_i)(p_{i+1}-p_i-1)}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)^2 - \frac{1}{2}(p_m-2).$$

应用柯西不等式有：

$$p_m - 2 = \sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i) \le \left[\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p_{i+1}\le n}1\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5\text{-}1)$$
$$= \left[\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}(\pi(n))^{\frac{1}{2}}. \quad (5\text{-}2)$$

从而可得不等式：

$$\sum_{p_{i+1}\le n}(p_{i+1}-p_i)^2 \ge \frac{(p_m-2)^2}{\pi(n)}.$$

由此及(5-2)式并注意A_n的定义可得：

$$nA_n \ge \frac{1}{2}\frac{(p_m-2)^2}{\pi(n)} - \frac{1}{2}(p_m-2) = \frac{1}{2}(p_m-2)\left[\frac{p_m-2}{\pi(n)}-1\right]$$

或者

$$A_n \ge \frac{1}{2n}(p_m-2)\left[\frac{p_m-2}{\pi(n)}-1\right].$$

应用引理5.2.1及引理5.2.2并注意估计式 $n-p_m \ll n^{\frac{7}{12}}$ 立刻推出：

$$A_n \ge \frac{\left[n+\mathrm{O}\left(n^{\frac{7}{12}}\right)\right]^2}{2n\left[\frac{n}{\ln n}+\mathrm{O}\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right)\right]} + O\left(\frac{p_m}{n}\right) = \frac{n^2+\mathrm{O}\left(n^{\frac{19}{12}}\right)}{\frac{2n^2}{\ln n}+\mathrm{O}\left(\frac{n^2}{\ln^2 n}\right)} + O(1)$$
$$= \frac{1}{2}\ln n + \mathrm{O}(1).$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln n + \mathrm{O}(1)\right] = +\infty,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty.$$

从而A_n是发散的. 于是完成了定理的证明.

5.3 关于SPAC(n)函数的新问题

问题5.1: 根据定义我们可以列举出最小素数可加补数的前几项:

$$1,\ 0,\ 0,\ \pm1,\ 0,\ \pm1,\ 0,\ -1,\ \pm2,\ 1,\ 0,\ \pm1,\ 0,\ -1,\ \pm2,\ \cdots$$

我们很容易发现在这个数列中有无穷个数重复了无穷次. 研究这个数列的性质.

第六章　伪Smarandache无平方因子函数

6.1　引言

这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的, 并建议人们研究它的性质! 首先, 我们给出伪Smarandache无平方因子函数的定义

定义6.1　对任意正整数n, 著名的伪Smarandache无平方因子函数$Zw(n)$定义为最小的正整数m使得$n \mid m^n$. 即就是$Zw(n) = \min\{m : m \in N,\ n|m^n\}$.

6.2　$Zw(n)$函数的研究现状

6.2.1　$Zw(n)$函数的基本定理

定理6.2.1　对任意正整数n, 如果$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式, 那么$Zw(n) = p_1p_2\cdots p_r$. 特别地, $Zw(p) = p$, 这里p为任意素数.

定理6.2.2　当且仅当n为无平方因子数时, $Zw(n) = n$.

定理6.2.3　对任意正整数n, $Zw(n) \leq n$.

定理6.2.4　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Zw(n)}{n}$$

是发散的.

定理6.2.5　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Zw(n)}$$

是发散的.

定理6.2.6 $Zw(n)$是可乘函数, 即就是, 当$(m,\ n)=1$时,

$$Zw(m\cdot n)=Zw(m)\cdot Zw(n).$$

定理6.2.7 $Zw(n)$不是可加函数, 即就是,

$$Zw(m+n)\neq Zw(m)+Zw(n).$$

定理6.2.8 当$n\geq 1$时, $Zw(n)\geq 1$.

定理6.2.9 当$n\geq 1$时, $0<\dfrac{Zw(n)}{n}\leq 1$.

定理6.2.10 对于任意实数$\epsilon>0$, 存在正整数$n\geq 1$, 使得

$$\frac{Zw(n)}{n}<\epsilon.$$

定理6.2.11 方程$\dfrac{Zw(n)}{n}=1$, 有无穷多个正整数解.

定理6.2.12 当n为偶数时, $Zw(n)$是偶数; 当n为奇数时, $Zw(n)$是奇数.

定理6.2.13 丢番图方程$Zw(n)=Zw(n+1)$没有正整数解.

定理6.2.14 对任意正整数n, 有估计式

$$\sum_{k=1}^{n}Zw(k)>\frac{6\cdot n}{\pi^2}.$$

定理6.2.15 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(Zw(n))^a},\quad a\in R,\quad a>0$$

是发散的.

定理6.2.16 对任意实数α, s满足$s-\alpha>1$及$\alpha>0$, 有恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Zw(n))^{\alpha}}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-\alpha)}{\zeta(2s-2\alpha)}\prod_{p}\left[1-\frac{1}{p^s+p^{\alpha}}\right],$$

其中$\zeta(s)$为Riemann zeta-函数, $\prod\limits_{p}$表示对所有素数求积.

定理6.2.17 对任意实数$\alpha>0$及$x\geq 1$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(Zw(n))^{\alpha}=\frac{\zeta(\alpha+1)x^{\alpha+1}}{\zeta(2)(\alpha+1)}\prod_{p}\left[1-\frac{1}{p^{\alpha}(p+1)}\right]+O\left(x^{\alpha+\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$$

6.2.2 关于$Zw(n)$函数的渐近公式

定理6.2.18 对任意正整数$n>1$, 我们有估计式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k}=1+O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

证明: 令$U(n)=\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k}$. 首先我们估计$U(n)$的上界. 事实上当$k>1$时, 由$Zw(k)$的定义我们不难推出$Zw(k)$表示$k$的所有不同素因数的乘积, 所以对任意正整数$k$有$Zw(k)\leq k$及$\ln(Zw(k))\leq\ln k$, 从而有估计式:

$$U(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{\ln k}=n-1\leq n. \tag{6-1}$$

其次我们估计$U(n)$的下界. 对任意正整数$2\leq k\leq n$, 设k的标准分解式为$k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$, 我们将区间$[2,\ n]$中的所有整数分成两个子集$A$及$B$, 其中$A$表示区间$[2,\ n]$中所有满足条件$\alpha_i\geq 2$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$的正整数k的集合; B表示区间$[2,\ n]$中所有满足至少有一个$\alpha_i=1$ $(1\leq i\leq s)$的正整数k的集合. 于是我们有

$$U(n)\ =\ \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k}\geq\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln n}$$

$$= \frac{1}{\ln n}\sum_{k\in A}\ln(Zw(k)) + \frac{1}{\ln n}\sum_{k\in B}\ln(Zw(k)). \qquad (6\text{-}2)$$

显然由集合A的定义可知A是区间$[2,\ n]$中所有Square-full数的集合, 所以我们有估计式:

$$\sum_{k\in A}\ln(Zw(k)) \le \sum_{k\in A}\ln k \le \sqrt{n}\cdot\ln n. \qquad (6\text{-}3)$$

另一方面, 对于任意$n \in B$, 一定存在一个素数p, 使得$p|n$且$\left(p, \dfrac{n}{p}\right) = 1$. 同时注意到素数定理的几种不同形式(参阅文献[2]定理4.10, 文献[3]及[8]):

$$\sum_{k\le n}\frac{\ln p}{p} = \ln n + O\left(1\right),$$

$$\sum_{k\le n}\ln p = n + O\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

及

$$\sum_{k\le n}\frac{\ln p}{p^2} = D + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

其中D为正常数. 于是我们有估计式

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in B}\ln(Zw(k)) &= \sum_{\substack{pk\le n\\(p,\ k)=1}}\ln(Zw(pk)) = \sum_{\substack{pk\le n\\(p,\ k)=1}}(\ln p + \ln(Zw(k)))\\
&\ge \sum_{\substack{pk\le n\\(p,\ k)=1}}\ln p = \sum_{p\le n}\ln p\sum_{\substack{k\le \frac{n}{p}\\(p,\ k)=1}}1\\
&= \sum_{p\le n}\ln p\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{p^2} + O(1)\right)\\
&= n\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p} - n\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p^2} + O\left(\sum_{p\le n}\ln p\right)\\
&= n\ln n + O(n). \qquad (6\text{-}4)
\end{aligned}$$

由(6-2), (6-3)及(6-4)式我们不难得到估计式:

$$U(n) = \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k} \ge \frac{1}{\ln n}\sum_{k\in B}\ln(Zw(k)) + O\left(\sqrt{n}\ln n\right)$$

$$\geq \frac{1}{\ln n}\left(n\ln n + O(n)\right) + O\left(\sqrt{n}\ln n\right) = n + \left(\frac{n}{\ln n}\right). \qquad (6\text{-}5)$$

结合(6-2)及(6-5)式我们立刻推出渐近公式:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理的证明.

在上述定理中取$n \to \infty$, 立即得到如下推论

推论6.2.18 对任意正整数n, 我们有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zw(k))}{\ln k} = 1.$$

6.2.3 关于函数$\dfrac{Zw(k)}{\theta(k)}$的渐近公式

定理6.2.19 对任意正整数$k > 1$, 令$\theta(k) = \sum\limits_{n\leq k}\ln\left(Zw(n)\right)$, 我们有渐近公式

$$\frac{Zw(k)}{\theta(k)} = \frac{Zw(k)}{\sum\limits_{n\leq k}\ln\left(Zw(n)\right)} = O\left(\frac{1}{\ln k}\right).$$

证明: 事实上, 对任意实数$x > 1$和任意正整数n, 根据Möbius函数$\mu(n)$的性质:

$$|\mu(n)| = \sum_{d^2|n}\mu(d)$$

并注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}|\mu(n)| &= \sum_{n\leq x}\sum_{d^2|n}\mu(d)\\ &= \sum_{md^2\leq x}\mu(d)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{d\le\sqrt{x}} \mu(d) \sum_{m\le\frac{x}{d^2}} 1 \\
&= \sum_{d\le\sqrt{x}} \mu(d) \left(\frac{x}{d^2} + O(1)\right) \\
&= x\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d>\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) + O\left(\sum_{d\le\sqrt{x}} |\mu(d)|\right) \\
&= x\left(\frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + O\left(\sqrt{x}\right) \\
&= \frac{6}{\pi^2}x + O\left(\sqrt{x}\right).
\end{aligned}
$$

下面我们利用这个结论来证明定理. 对任意无平方因子数n, $Zw(n) = n$, 则有

$$
\begin{aligned}
\theta(k) &= \sum_{n\le k} \ln\left(Zw(n)\right) \\
&\ge \sum_{n\le k} |\mu(n)| \ln n \\
&\ge \sum_{\sqrt{k}\le n\le k} |\mu(n)| \ln(\sqrt{k}) \\
&= \frac{1}{2}\ln k \sum_{\sqrt{k}\le n\le k} |\mu(n)| \\
&= \frac{1}{2}\ln k \left(\sum_{n\le k} |\mu(n)| - \sum_{n\le\sqrt{k}} |\mu(n)|\right). \qquad (6\text{-}6)
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\theta(k) &\ge \frac{1}{2}\ln k \left(\sum_{n\le k} |\mu(n)| - \sum_{n\le\sqrt{k}} |\mu(n)|\right) \\
&\ge \frac{1}{2}\ln k \left(\frac{6}{\pi^2}k + O(\sqrt{k})\right) \\
&= \frac{3}{\pi^2}k\cdot\ln k + O(\sqrt{k}\cdot\ln k). \qquad (6\text{-}7)
\end{aligned}
$$

注意到$Zw(n) \leq n$, 于是我们立即得到

$$0 < \frac{Zw(k)}{\theta(k)} \leq \frac{k}{\frac{3}{\pi^2}k \cdot \ln k + O(\sqrt{k} \cdot \ln k)} = O\left(\frac{1}{\ln k}\right)$$

或

$$\frac{Zw(k)}{\theta(k)} = O\left(\frac{1}{\ln k}\right).$$

这就完成了定理的证明.

根据定理我们立即得到如下结论:

推论6.2.19 对任意正整数k, 我们有如下结论

$$\lim_{k\to\infty} \frac{Zw(k)}{\theta(k)} = 0.$$

6.3 $Zw(n)$函数的新问题

问题6.1: 研究方程$Zw(n) = Zw(n+1) + Zw(n+2)$的解.

对1000以内的$Zw(n)$的值, 该方程没有解.

问题6.2: 研究方程$Zw(n) + Zw(n+1) = Zw(n+2)$的解.

对1000以内的$Zw(n)$的值, 有且仅有6个解

$$Zw(1) + Zw(2) = Zw(3), \quad Zw(3) + Zw(4) = Zw(5),$$

$$Zw(15) + Zw(16) = Zw(17), \quad Zw(31) + Zw(32) = Zw(33),$$

$$Zw(127) + Zw(128) = Zw(129), \quad Zw(225) + Zw(256) = Zw(257).$$

问题6.3: 研究方程$Zw(n) = Zw(n+1) \cdot Zw(n+2)$的解.

对1000以内的$Zw(n)$的值, 该方程没有解, 但是对所有的n, 该方程是否成立?注意到如果n是奇数, 上述方程没有解. 事实上, 当n是奇数时, $Zw(n)$是奇数, $Zw(n+1) \cdot Zw(n+2)$是偶数. 此时, 该方程不成立. 如果n, $n+1, n+2$都是无平方因子数, 则有$n = n^2 + 3n + 2$, 显然这不成立, 即该方程没有解.

问题6.4: 研究方程$Zw(n)\cdot Zw(n+1)=Zw(n+2)$的可解性问题.

对1000以内的$Zw(n)$的值, 该方程没有解, 但是对所有的n, 该方程是否成立? 注意到如果n是奇数, 上述方程没有解. 事实上, 当n是奇数时, $Zw(n)$是奇数, $Zw(n+1)\cdot Zw(n+2)$是偶数. 此时, 该方程不成立. 如果n, $n+1, n+2$都是无平方因子数, 则有$n^2+n=n+2$, 显然这不成立, 即该方程没有解.

问题6.5: 研究方程$Zw(n)\cdot Zw(n+1)=Zw(n+2)\cdot Zw(n+3)$的可解性问题.

对1000以内的$Zw(n)$的值, 该方程没有解, 但是对所有的n, 该方程是否成立?

问题6.6: 研究方程$Zw(n)=S(n)$的解, 其中$S(n)$是Smarandache函数.

问题6.7: 寻求最小的正整数k, 使得$Zw(n), \cdots, Zw(n+k)$中至少有一个素数.

问题6.8: 研究方程$Zw(Z(n))-Z(Zw(n))=0$的解, 其中$Z(n)$是伪Smarandache函数.

问题6.9: 研究不等式$Zw(Z(n))-Z(Zw(n))>0$的解.

问题6.10: 研究不等式$Zw(Z(n))-Z(Zw(n))<0$的解.

问题6.11: 研究函数

$$Zw(Z(n)),\ Z(Zw(n)),\ Zw(Z(n))-Z(Zw(n))$$

的性质.

问题6.12: 是否存在非零正整数m, n, k, 使得$Zw(m\cdot n)=m^k\cdot Zw(n)$成立.

问题6.13: 是否存在整数$k>1$和$n>1$使得$Zw(n)^k=kZw(n\cdot k)$成立.

问题6.14: 研究方程

$$Zw(n)^r + Zw(n)^{r-1} + \cdots + Zw(n) = n$$

其中r是正整数, 且$r \geq 2$.

第七章 Smarandache双阶乘函数

7.1 引言

这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的, 并建议人们研究它的性质! 首先, 我们给出Smarandache双阶乘函数的定义

定义7.1 对任意正整数n, Smarandache双阶乘函数$Sdf(n)$定义为满足$Sdf(n)!!$能被n整除的最小的正整数.

7.2 Smarandache双阶乘函数的研究现状

7.2.1 Smarandache双阶乘函数的基本定理

定理7.2.1 对于任意素数p, $Sdf(p)=p$.

定理7.2.2 对于任意无平方因子偶数n, 我们有

$$Sdf(n)=2\cdot\max\{p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_k\}$$

其中$\{p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots p_k\}$ 是n的素因子.

证明: 不失一般性, 我们设$n=p_1\cdot p_2\cdot p_3$, 其中$p_3>p_2>p_1$ 且$p_1=2$. 如果偶数的阶乘是n的倍数, 那么满足$2\cdot 4\cdot 6\cdot m$能被n整除的最小正整数m是$2\cdot p_3$. 事实上对于$m=2\cdot p_3$, 我们有:

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot p_2\cdot 2\cdot p_3=(2\cdot p_2\cdot p_3)(4\cdot 6\cdot 2\cdot 2)=k\cdot(2\cdot p_2\cdot p_3), k\in N$$

定理7.2.3 对于任意无平方因子数n, 我们有

$$Sdf(n)=\max\{p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_k\},$$

其中$\{p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots,\ p_k\}$是$n$的素因子.

证明: 不失一般性, 我们设$n=p_1\cdot p_2$, 其中p_1和p_2是两个不同的素数且$p_2>p_1$. 一直到p_2的奇数n的阶乘都应该是n的倍数, 因为当$p_1<p_2$ 时这个阶乘一定包含$p_1\cdot p_2$的积, 也就是n的阶乘为: $1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot p_1\cdot p_2$.

定理7.2.4 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf(n)}$是发散的.

证明: 这个定理是由和式$\sum_{p}\frac{1}{p}$的发散性直接得到的, 其中p是任意素数. 事实上, 由定理7.2.1可得$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf(k)} > \sum_{p}\frac{1}{p}$, 这就完成了定理的证明.

定理7.2.5 $Sdf(n)$这个函数是不可加函数. 也就是当$(n,m)=1$时

$$Sdf(n+m) \neq Sdf(n) + Sdf(m).$$

证明: 事实上, 例如:$Sdf(2+15) \neq Sdf(2) + Sdf(15)$.

定理7.2.6 $Sdf(n)$这个函数是不可乘函数. 也就是当$(n,m)=1$时

$$Sdf(n \cdot m) \neq Sdf(n) \cdot Sdf(m).$$

证明: 事实上, 例如:$Sdf(3 \cdot 4) \neq Sdf(3) \cdot Sdf(4)$.

定理7.2.7 $Sdf(n) \leq n$.

证明: 事实上, 当n是无平方因子数时, 由定理7.2.1, 7.2.2和定理7.2.3, 有$Sdf(n) \leq n$. 当n不是无平方因子数时, 由于函数$Sdf(n)$的最大值一定不大于n, 当我们取到n的阶乘, 那么它一定是n的倍数.

定理7.2.8 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Sdf(n)}{n}$是发散的.

证明: 事实上, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Sdf(k)}{k} > \sum_{p=2}^{\infty}\frac{Sdf(p)}{p}$, 其中$P$是任意素数. 由于素数$p$有无穷多个, 并且$Sdf(p)=p$, 因此$\sum_{p=2}^{\infty}\frac{Sdf(p)}{p}$是发散的.

定理7.2.9 对任意正整数, 我们有$Sdf(n) \geq 1$.

证明: 这个定理可以由该函数的定义直接得到. 事实上, 当$n=1$时, 满足定义的最小正整数一定是1. 当$n\neq 1$时, 由于1的阶乘一定不是n的倍数, 所以$Sdf(n)\geq 1$.

定理7.2.10 对任意正整数, 我们有$0<\dfrac{Sdf(n)}{n}\leq 1$.

证明: 这个定理可以由定理7.2.7和定理7.2.9直接得到.

定理7.2.11 $Sdf(p_k^{\#})=2p_k$, 其中$p_k^{\#}$表示前k个素数的乘积.

证明: 这个定理可以由定理7.2.2直接得到.

定理7.2.12 方程$\dfrac{Sdf(n)}{n}=1$有无穷多个正整数解.

证明: 这个定理可以由定理7.2.1直接得到. 事实上, 有无穷多个素数满足该方程.

定理7.2.13 函数$Sdf(n)$保持奇偶性不变. 即就是$Sdf(\text{偶})=\text{偶}$, $Sdf(\text{奇})=\text{奇}$.

证明: 这个定理可以由定义直接得到.

定理7.2.14 丢番图方程$Sdf(n)=Sdf(n+1)$没有正整数解.

证明: 事实上, 根据定理7.2.13, n和$Sdf(n)$的奇偶性保持一致. 因此当n为奇数时, $Sdf(n)$ 也是奇数, 但$n+1$是偶数, $Sdf(n+1)$是偶数. 此时方程无解. 同理可得, 当n为偶数时, 方程无解.

7.3 Smarandache双阶乘函数的新问题

问题7.1: 讨论$|Sdf(n+1)-Sdf(n)|$是否有界.

问题7.2: 寻找方程$\dfrac{Sdf(n+1)}{Sdf(n)}=k$, $\dfrac{Sdf(n)}{Sdf(n+1)}=k$的正整数解. 其中$k$ 是任意正整数, 并且对于前一个方程$n>1$.

猜想: 第一个方程无解.

问题7.3: 我们定义$Sdf(n)$ 的k次复合为:

$$Sdf^k(n) = Sdf(Sdf(Sdf\cdots(Sdf(n))\cdots)),$$

其中Sdf重复k次. 对于所有的n, 研究$Sdf(n)$的每一次复合是否都能得到一个定值或者是一个循环.

问题7.4: 寻找最小的正整数k, 使得$Sdf(n)$和$Sdf(k+n)$之间至少存在一个素数.

问题7.5: 对于$n \geq 1$, 讨论由Smarandache双阶乘函数$Sdf(n)$顺次排列所构成的数字$0.1232567491011\cdots$是有理数还是无理数. 我们称这个数是伪Smarandache双阶乘常数.

问题7.6: 估计$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot Sdf(k)^{-1}$的值.

问题7.7: 估计$\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Sdf(n)}$的值.

问题7.8: 计算$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{Sdf(k)}{\theta(k)}$的值, 其中$\displaystyle\theta(k) = \sum_{n\leq k}\ln(Sdf(n))$.

问题7.9: 是否存在非零正整数m,n,k, 使得等式

$$Sdf(n\cdot m) = m^k \cdot Sdf(n)$$

成立.

问题7.10: 寻求方程$Sdf(n)! = Sdf(n!)$的所有正整数解.

问题7.11: 对于$k>1$和$n>1$, 寻求方程$Sdf(n^k) = k\cdot Sdf(n)$的所有正整数解.

问题7.12: 对于$k>1$, 寻求方程$Sdf(n^k) = n\cdot Sdf(k)$的所有正整数解.

问题7.13: 寻求方程$Sdf(n^k) = n^m \cdot Sdf(m)$的所有正整数解, 其中$k>1$, m, $n>0$.

问题7.14: 对于函数$Sdf(n)$的前几个值, 不等式

$$\frac{n}{Sdf(n)} \leq \frac{1}{8} \cdot n + 2, \quad 1 \leq n \leq 1000$$

成立. 当$n > 1000$时, 该不等式是否依然成立.

问题7.15: 对于函数$Sdf(n)$的前几个值, 不等式

$$\frac{Sdf(n)}{n} \leq \frac{1}{n^{0.73}}, \quad 1 \leq n \leq 1000$$

成立. 当$n > 1000$时, 该不等式是否依然成立.

问题7.16: 对于函数$Sdf(n)$的前几个值, 不等式

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{Sdf(n)} < n^{-\frac{1}{4}}, \quad 2 < n \leq 1000$$

成立. 当$n > 1000$时, 该不等式是否依然成立.

问题7.17: 对于函数$Sdf(n)$的前几个值, 不等式

$$\frac{1}{n \cdot Sdf(n)} < n^{-\frac{5}{4}}, \quad 1 \leq n \leq 1000$$

成立. 当$n > 1000$时, 该不等式是否依然成立.

问题7.18: 研究Smarandache双阶乘函数函数$Sdf(n)$的调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Sdf^a(n)}, \quad \text{其中} a > 0,\ a \in R$$

的敛散性.

问题7.19: 讨论

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{\ln Sdf(k)}{\ln(k)}}{n}$$

的值是否收敛于某个著名的数学常数.

问题7.20: 求解方程

$$Sdf(n)^r + Sdf(n)^{r-1} + \cdots + Sdf(n) = n,$$

其中$r \geq 2$是正整数. 以及

$$Sdf(n)^r + Sdf(n)^{r-1} + \cdots + Sdf(n) = k \cdot n,$$

其中$r,\ k \geq 2$都是正整数.

问题7.21: 讨论$Sdf\left(\prod_{k=1}^{m} m_k\right)$和$\sum_{k=1}^{m} Sdf(m_k)$的关系.

第八章 伪Smarandache-totient函数

8.1 引言

首先, 我们给出伪Smarandache-totient函数的定义

定义8.1 对任意正整数n, 伪Smarandache-totient函数$Zt(n)$定义为满足$\sum_{k=1}^{m}\varphi(k)$能被n整除的最小的正整数m, 其中$\varphi(n)$是Euler函数.

8.2 伪Smarandache-totient函数的研究现状

8.2.1 伪Smarandache-totient函数的基本定理

定理8.2.1 函数$Zt(n)$既不可加也不可乘, 即就是当$(m,\ n)=1$时,

$$Zt(m+n)\neq Zt(m)+Zt(n),\quad Zt(m\cdot n)\neq Zt(m)\cdot Zt(n).$$

证明: 事实上, $Zt(2+3)\neq Zt(2)+Zt(3)$, $Zt(2\cdot 3)\neq Zt(2)\cdot Zt(3)$.

定理8.2.2 对任意正整数$n>1$, 则有$Zt(n)>1$.

证明: 事实上, 由于当$n>0$时, $\varphi(n)>0$. 当$n=1$时, $\varphi(n)=1$. 所以当且仅当$n=1$时, $Zt(n)=1$.

定理8.2.3 对任意正整数$n\geq 1$, 则有

$$\sum_{k=1}^{Zt(n)}\varphi(k)\leq\frac{Zt(n)\cdot(Zt(n)+1)}{2}.$$

证明: 假设$Zt(n)=m$. 因为当$n\geq 1$时, $\varphi(n)\leq n$. 于是有

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi(k)\leq\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m\cdot(m+1)}{2}.$$

定理8.2.4 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Zt(n)}$发散.

证明: 根据定义, 假设$Zt(n)=m$, 于是, $\sum_{k=1}^{m}\varphi(k)=a\cdot n$, 这里$a\in N$. 则有$\frac{3\cdot m^2}{\pi^2}\approx a\cdot n$. 因此有$m\approx\sqrt{\frac{\pi^2\cdot a\cdot n}{3}}$ 和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Zt(n)}\approx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{a\cdot n}{3}}}>\frac{3}{a\cdot\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散, 这是因为$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的.

定理8.2.5 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Zt(n)}{n}$发散.

证明: 事实上,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Zt(n)}{n}\approx\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{a\cdot n}{3}}}{n}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

于是可知此级数发散.

定理8.2.6 $n\leq\frac{\pi^2}{3}\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$.

证明: 事实上, 由于

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\approx\frac{3n^2}{\pi^2},$$

那么定理的结论即为$n\leq n^2$, 这是显然的.

定理8.2.7 $\sum_{k=1}^{Zt(n)}\varphi(k)\geq n$.

证明: 这个结果可以由$Zt(n)$的定义直接得到. 事实上,

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi(k)=a\cdot n,\ (a\in N).$$

当$a=1$时, $\sum_{k=1}^{m}\varphi(k)=n$. 当$a>1$时, $\sum_{k=1}^{m}\varphi(k)>n$. 于是定理得证.

定理8.2.8 $Zt(n)\geq\left\lfloor\pi\cdot\sqrt{\frac{n}{3}}\right\rfloor$.

证明: 这个结果可以由$Zt(n)$的定义直接得到. 事实上,

$$Zt(n)\approx\pi\cdot\sqrt{\frac{a\cdot n}{3}}\geq\left\lfloor\pi\cdot\sqrt{\frac{n}{3}}\right\rfloor,\ a\in N.$$

其中$\lfloor n\rfloor$表示弱取整函数, 即是不超过n的最大正整数.

定理8.2.9 $Zt(n)<n$ 不恒成立.

证明: 例如$Zt(n)$的以下几个值不满足此不等式:

$$Zt(3)=4,\quad Zt(7)=9\text{等}.$$

定理8.2.10 $Zt(n)$ 的取值范围是$N-\{0\}$, 这里N表示正整数集合.

证明: 事实上, 对任意正整数m, 我们可以找到给定的n, 满足

$$n\approx\frac{3\cdot m^2}{a\cdot\pi^2},\ a\in N$$

使得$Zt(n)=m$.

8.3 伪Smarandache-totient函数的新问题

问题8.1: 寻找满足$Zt(n)$, $Zt(n+1)$, $Zt(n+2)$, $\cdots$, $Zt(n+k)$是递增序列的最大正整数k.

例如: 对于1000以内的$Zt(n)$的值, 我们得知$k=5$, $k=4$时, 有

$$Zt(514) < Zt(515) < Zt(516) < Zt(517) < Zt(518) < Zt(519),$$

$$Zt(544) < Zt(545) < Zt(546) < Zt(547) < Zt(548).$$

问题8.2: 寻求方程$Zt(n)=n$的所有正整数解.

对于1000以内的$Zt(n)$的值, 我们得知$n=1, 2, 5$是该方程的解. 但是该方程是否还有其它解. 此时, 我们需要求解下面的方程

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=a\cdot n,\quad a\in N.$$

问题8.3: 集合A表示$Zt(n)<n$的元素的个数, 集合B表示$Zt(n)>n$的元素的个数, 试求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{B}$.

问题8.4: 估计下面的值是否有界:

$$d_n=|Zt(n+1)-Zt(n)|$$

$$r_n=\frac{Zt(n+1)}{Zt(n)}$$

$$l_n=\frac{|Zt(n)-Zt(m)|}{|n-m|}\qquad n,\ m\in N$$

问题8.5: 试寻求正整数n, 使得
(1) $Zt(n)|Zt(n+1)$,
(2) $Zt(n+1)|Zt(n)$.

对于1000以内的$Zt(n)$的值, 我们找到了满足(1)的所有解为:

$$Zt(1)|Zt(2),\ Zt(2)|Zt(3),\ Zt(80)|Zt(81),$$

$$Zt(144)|Zt(145),\ Zt(150)|Zt(151), Zt(396)|Zt(397),$$

$$Zt(549)|Zt(550),\ Zt(571)|Zt(572),\ Zt(830)|Zt(831).$$

满足(2)的所有解为:

$$Zt(34)|Zt(33),\ Zt(46)|Zt(45),\ Zt(75)|Zt(74),\ Zt(86)|Zt(85),$$

$$Zt(90)|Zt(89),\ Zt(108)|Zt(107),\ Zt(172)|Zt(171),\ Zt(225)|Zt(224),$$

$$Zt(242)|Zt(241),\ Zt(465)|Zt(464),\ Zt(650)|Zt(649),\ Zt(886)|Zt(885).$$

如果我们用C, D分别表示(1)和(2)的解的个数, 试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D}{C},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(D-C)^2}{|C^2-D^2|}.$$

问题8.6: 寻求方程$Zt(n+1)=Zt(n)$的所有正整数解.

猜想: 我们猜测这个方程无解.

问题8.7: 寻求$Zt(n+m)$与$Zt(n)$, $Zt(m)$之间的关系, 以及$Zt(n\cdot m)$与$Zt(n)$, $Zt(m)$之间的关系.

问题8.8: 考虑函数$Zt(n)$和$\varphi(n)$. 假设我们用K表示$Zt(n)>\varphi(n)$的元素的个数, 用L表示$Zt(n)<\varphi(n)$的元素的个数. 估计

$$\lim_{n\to\infty}\frac{K}{L}.$$

分析关于函数$Zt(n)$和$\varphi(n)$的前100个n值, 满足$Zt(n)>\varphi(n)$的n值有:

$$n=2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18,19,20,24,25,26,27\cdots$$

而满足$Zt(n)<\varphi(n)$的n值有:

$$n=11,21,22,23,28,29,32,35,42,43,46,49,51\cdots$$

当$1\le n\le 10000$时, 方程$Zt(n)=\varphi(n)$有以下9 个解:

$$n=1,\ 40,\ 45,\ 90,\ 607,\ 1025,\ 1214,\ 2050,\ 5345.$$

试求: 方程$Zt(n)=\varphi(n)$是否有有限个解. 估计满足$|K-L|$=0的n的个数.

问题8.9: 分析$Zt(n)$的复合函数的n 的取值.

例如$Zt(n)$的k次复合函数为:

$$Zt^k(n)=Zt(Zt(Zt(\cdots(Zt(n))\cdots)$$

其中Zt重复k次.

试求: 对于所有的n, 每一次$Zt(n)$的复合都会得到一个定值或者一个循环吗?

问题8.10: 寻求方程$Zt(n)+Zt(n+1)=Zt(n+2)$的所有正整数解, 并讨论该方程的解是否是有限个.

对于1000以内的$Zt(n)$的值, 我们找到了满足上述方程的解为$n=6$:

$$Zt(6)+Zt(7)=Zt(8).$$

问题8.11: 寻求方程$Zt(n)=Zt(n+1)+Zt(n+2)$的所有正整数解.

对于1000以内的$Zt(n)$的值, 我们找到了满足上述方程的解为$n=49$:

$$Zt(49)=Zt(50)+Zt(51).$$

该方程是否存在其它的解?

问题8.12: 寻求方程$Zt(n)=Zt(n+1)\cdot Zt(n+2)$的所有正整数解.

对于1000以内的$Zt(n)$的值, 我们没有找到满足上述方程的解, 讨论该方程是否有解? 计算机研究数据表明: $Zt(n)<Zt(n+1)\cdot Zt(n+2)$成立, 如果我们可以证明这个不等式恒成立, 即就证明了该方程无解.

问题8.13: 寻求方程$Zt(n)\cdot Zt(n+1)=Zt(n+2)$的所有正整数解.

对于1000以内的$Zt(n)$的值, 我们没有找到满足上述方程的解, 讨论该方程是否有解?

问题8.14: 寻求方程$Zt(n)\cdot Zt(n+1)=Zt(n+2)\cdot Zt(n+3)$的所有正整数解.

对于1000以内的$Zt(n)$的值, 我们没有找到满足上述方程的解, 讨论该方程是否有解?

问题8.15: 寻求方程$Z(n)=Zt(n)$的所有正整数解, 其中$Z(n)$是Pseudo-Smarandache函数.

对于60以内的$Zt(n)$的值, 我们找到满足上述方程的解为:$n=1$, 24, 即$Z(1)=Zt(1)=1$, $Z(24)=Zt(24)=15$. 讨论该方程是否还有其它解?

问题8.16: 寻求方程$Zt(n)=Z(n)-1$和$Zt(n)=Z(n)+1$的所有正整数解.

对于60以内的$Zt(n)$的值, 我们发现满足方程$Zt(n)=Z(n)-1$的有:

$$Zt(2)=Z(2)-1,\quad Zt(9)=Z(9)-1,$$

$$Zt(18)=Z(18)-1,\quad Zt(44)=Z(44)-1.$$

满足方程$Zt(n)=Z(n)+1$的有:

$$Zt(5)=Z(5)+1,\quad Zt(6)=Z(6)+1,$$

$$Zt(10)=Z(10)+1,\quad Zt(20)=Z(20)+1,$$

$$Zt(40)=Z(40)+1,\quad Zt(51)=Z(51)+1.$$

讨论该方程是否有有限个解?

问题8.17: 寻求方程$Zt(n)=S(n)$的所有正整数解,其中$S(n)$是Smarandache函数.

对于84以内的$Zt(n)$的值, 我们发现满足方程$Zt(n)=S(n)$的有:

$$Zt(1)=S(1),\quad Zt(2)=S(2)=2,$$

$$Zt(5) = S(5) = 5, \quad Zt(10) = S(10) = 5.$$

讨论该方程是否还有其它解?

问题8.18: 寻求方程$S(n) = Zt(n) + 1$和$S(n) = Zt(n) - 1$的所有正整数解.

对于84以内的$Zt(n)$的值, 我们发现满足方程$S(n) = Zt(n) + 1$的有:

$$S(4) = Zt(4) + 1.$$

满足方程$S(n) = Zt(n) - 1$的有:

$$S(3) = Zt(3) - 1, \quad S(6) = Zt(6) - 1,$$

$$S(9) = Zt(9) - 1, \quad S(17) = Zt(17) - 1,$$

$$S(18) = Zt(18) - 1, \quad S(34) = Zt(34) - 1,$$

$$S(51) = Zt(51) - 1.$$

讨论该方程是否还有其它解?是否有有限个解?

如果我们寻求方程$S(n) = Zt(n) - 1$的解, 我们发现有两个相邻的解$n = 17$和$n = 18$.是否还存在类似的解?

问题8.19: 寻求方程$S(n) = 2 \cdot Zt(n) - Z(n)$的所有正整数解.

对于84以内的$Zt(n)$的值, 我们发现有两个解:

$$S(9) = 2 \cdot Zt(9) - Z(9), \; S(18) = 2 \cdot Zt(18) - Z(18).$$

讨论方程的解之间的关系.

问题8.20: 寻求方程$Zt(p) = p'$的所有正整数解, 其中p和p'是不同的素数.

对于60以内的$Zt(n)$的值, 我们发现有三个解:

$$Zt(29) = 13, \; Zt(41) = 67, \; Zt(43) = 23.$$

讨论方程是否存在其它的解.

问题8.21: 寻求方程$Zt(p) = p$的所有正整数解, 其中p是任意素数.

对于60以内的$Zt(n)$的值, 我们发现有两个解:

$$Zt(2) = 2,\ Zt(5) = 5.$$

讨论方程是否存在其它的解.

问题8.22: 寻找满足$Zt(n)$和$Zt(k+n)$之间至少存在一个素数p的最小正整数k.

问题8.23: 寻求方程$Zt(Z(n)) - Z(Zt(n)) = 0$的正整数解.

问题8.24: 求解不等式$Zt(Z(n)) - Z(Zt(n)) > 0$.

问题8.25: 求解不等式$Zt(Z(n)) - Z(Zt(n)) < 0$.

问题8.26: 研究函数$Zt(Z(n))$, $Z(Zt(n))$和$Zt(Z(n)) - Z(Zt(n))$的关系.

问题8.27: 计算$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Z_1}{Z_2}$的值, 其中$Z_1 = \sum\limits_n Zt(Z(n))$, $Z_2 = \sum\limits_n Z(Zt(n))$.

问题8.28: 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_n |Zt(Z(n)) - Z(Zt(n))|}{\left|\sum\limits_n Zt(Z(n)) - \sum\limits_n Z(Zt(n))\right|}.$$

问题8.29: 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum\limits_n |Zt(Z(n)) - Z(Zt(n))|\right)^2}{\sum\limits_n (Zt(Z(n)) - Z(Zt(n)))^2}$$

的值.

问题8.30: 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_n \frac{1}{Zt(Z(n))}-\sum_n \frac{1}{Z(Zt(n))}\right|$$

的值.

问题8.31: 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_n \frac{Zt(n)}{Z(n)}$$

的值.

问题8.32: 研究函数$F(n)=S(Z(Zt(n)))$的性质.

问题8.33: 计算

$$\lim_{n\to\infty}\sum_n |Zt(Z(n))-Z(Zt(n))|$$

的值.

问题8.34: 考虑关于函数$Z(n)$和$Zt(n)$的如下均值性质:

$$Zt_1=\sum_n \frac{1}{(Zt(n))!},\qquad Z_1=\sum_n \frac{1}{(Z(n))!},$$

$$Zt_2=\sum_n \frac{Zt(n)}{n!},\qquad Z_2=\sum_n \frac{Z(n)}{n!},$$

$$Zt_3=\sum_n \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} Zt(i)},\qquad Z_3=\sum_n \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} Z(i)},$$

$$Zt_4(a)=\sum_n \frac{n^a}{\prod\limits_{i=1}^{n} Zt(i)},\qquad Z_4(a)=\sum_n \frac{n^a}{\prod\limits_{i=1}^{n} Z(i)},$$

$$Zt_5=\sum_n \frac{(-1)^{n-1}\cdot Zt(n)}{n!},\qquad Z_5=\sum_n \frac{(-1)^{n-1}\cdot Z(n)}{n!},$$

$$Zt_6 = \sum_n \frac{Zt(n)}{(n+1)!}, \qquad Z_6 = \sum_n \frac{Z(n)}{(n+1)!},$$

$$Zt_7 = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{Zt(n)}{(n+r)!}, \qquad Z_7 = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{Z(n)}{(n+r)!},$$

$$Zt_8 = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{Zt(n)}{(n-r)!}, \qquad Z_8 = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{Z(n)}{(n-r)!},$$

$$Zt_9 = \sum_n \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{Zt(i)}{i!}}, \qquad Z_9 = \sum_n \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{Z(i)}{i!}},$$

$$Zt_{10}(a) = \sum_n \frac{1}{(Zt(n))^a \cdot \sqrt{Zt(n)!}}, \qquad Z_{10}(a) = \sum_n \frac{1}{(Zt(n))^a \cdot \sqrt{Z(n)!}},$$

$$Zt_{11}(a) = \sum_n \frac{1}{(Zt(n))^a \cdot \sqrt{(Zt(n)+1)!}},$$

$$Z_{11}(a) = \sum_n \frac{1}{(Zt(n))^a \cdot \sqrt{(Z(n)+1)!}}.$$

问题8.35: 对于$n \geq 1$, 讨论由函数$Zt(n)$顺次排列所构成的数字$0.1243549107585\cdots$是有理数还是无理数. 我们称这个数是伪Smarandache-totient常数.

问题8.36: 计算和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot Zt(k)^{(-1)} \quad 和 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \cdot Z(k)^{(-1)}$$

的值.

问题8.37: 计算

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Zt(n)} \quad 和 \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z(n)}$$

的值.

问题8.38: 估计$F=\pi^{4S}$的值, 其中$S=\sum_k \frac{1}{a(k)}$, 取$a(k)=S(k)$, $Z(k)$, $Zt(k)$函数时, 考察这几组数F是否是整数.

问题8.39: 是否存在非零正整数m, n, k使得

$$Zt(m\cdot n)=m^k\cdot Zt(n)$$

成立.

显然, 对于$m=1$, 此时$Zt(1\cdot n)=Zt(n)$, 即该方程有无限个解. 对于$n=1$, 此时$Zt(m\cdot 1)=m^k$, 那么当且仅当$Zt(m)=m$, $k=1$时, m是一个解. 该方程是否还有其它解.

问题8.40: 令$FZt(n)=m$, 其中m表示使得$Zt(k)=n$的不同的正整数k的个数. 研究函数$FZt(n)$的性质, 并估计:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{FZt(k)}{k}}{m}$$

的值.

问题8.41: 是否存在正整数$k>1$, $n>1$, 满足方程

$$Zt(n)^k=k\cdot Zt(n\cdot k).$$

问题8.42: 研究伪Smarandache-totient调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Zt^{\alpha}(n)}\qquad \text{其中}\alpha\text{是大于零的任意实数}$$

的敛散性.

问题8.43: 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{Zt(x_n)}$$

的敛散性. 其中x_n是递增数列, 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

问题8.44: 讨论极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(Zt(k))}{\ln(k)}}{n}$$

是否收敛于某个著名的数学常数.

问题8.45: 求解方程

$$Zt(n)^r + Zt(n)^{r-1} + \cdots + Zt(n) = n \quad r \in N,\ r \geq 2.$$

$$Zt(n)^r + Zt(n)^{r-1} + \cdots + Zt(n) = k \cdot n \quad r,\ k \in N, \quad r,\ k \geq 2.$$

问题8.46: 讨论$Zt\left(\prod_{k=1}^{m} m_k\right)$和$\sum_{k=1}^{m} Zt(m_k)$之间的关系.

问题8.47: 求解方程:

$$\left\lfloor e^{\varphi(n)} \right\rfloor - Zt(n) = 0.$$

当$1 \leq n \leq 5000$时, 方程只有一个解$n = 2$, 这个解是否唯一?

第九章 伪Smarandache函数

9.1 引言

首先, 我们给出伪Smarandache函数的定义

定义9.1 对任意正整数n, 伪Smarandache函数$Z(n)$定义为满足$\sum_{k=1}^{m} k$能被n整除的最小的正整数m.

9.2 伪Smarandache函数的研究现状

9.2.1 伪Smarandache函数的基本定理

定理9.2.1 对任意正整数n, 我们有伪Smarandache函数$Z(n) \geq 1$.

证明: 这个结论可以由定义直接得到.
注意到: 当且仅当$n = 1$时, 有$Z(n) = 1$.

定理9.2.2 对任意正整数n, $Z(n) < n$ 不恒成立.

证明: 例如: $Z(2) = 3$, $Z(4) = 7$, $Z(8) = 15$.

定理9.2.3 对任意素数$p \geq 3$, $Z(p) = p - 1$.

证明: 令$Z(p) = m$, 其中m是正整数. 由于$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$, 根据定义可知$m$是满足

$$p | \frac{m(m+1)}{2}$$

的最小正整数.

显然, p一定整除m或者$m+1$, 满足该条件的最小的数是$p = m+1$或者$p - 1 = m$, 且$p \neq 2$. 否则, 若$p = 2$, 则有$Z(2) = 3$.

定理9.2.4 对任意素数$p \geq 3$及$k \in N$, 我们有$Z(p^k) = p^k - 1$. 当$p = 2$时, 则有$Z(2^k) = 2^{k+1} - 1$.

证明: 令$Z(p^k)=m$, 其中m是某个正整数. 由于$\sum_{k=1}^{m} k=\frac{m(m+1)}{2}$, 根据定义可知$m$是满足

$$p^k|\frac{m(m+1)}{2}$$

的最小正整数.

显然, p^k一定整除m或$m+1$, 满足该条件的最小的数是$p^k=m+1$或$p^k-1=m$, 且$p\neq 2$. 否则, 若$p=2$, 则有$Z(2)=3$.

定理9.2.5　对任意合数n, 我们有$Z(n)=\max\{Z(m),\ 其中m|n\}$.

证明: 假设n是合数, 此时结论即为:

$$Z(n)\geq \max\{Z(m),\ 其中m|n\}.$$

令$Z(n)=p$, $Z(m)=q$, 其中$m|n$. 设$q>p$, 于是有

$$n|\frac{p(p+1)}{2},\quad m|\frac{q(q+1)}{2}.$$

定理9.2.6　(1) $Z(n)$是不可加的, 即$Z(m+n)$不恒等于$Z(n)+Z(m)$.
(2) $Z(n)$是不可乘的, 即$Z(m\cdot n)$不恒等于$Z(n)\cdot Z(m)$.

证明: 例如:

$$Z(2+3)=Z(5)=4\neq 5=Z(3)+Z(2),$$

$$Z(2\cdot 3)=Z(6)=3\neq 2\cdot 3=Z(2)\cdot Z(3).$$

定理9.2.7　极限$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)}$发散.

证明: 事实上, 根据函数$Z(n)$的定义我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)}>\sum_{p=3}^{n}\frac{1}{Z(p)}=\sum_{3\leq p\leq n}\frac{1}{p-1}>\sum_{3\leq p\leq n}\frac{1}{p}.$$

众所周知, $\sum_{p}\frac{1}{p}$是发散的. 因此, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{Z(k)}$也是发散的.

定理9.2.8 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k}$发散.

证明: 事实上, 根据函数$Z(n)$的定义我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k} > \sum_{p=3}^{n}\frac{Z(p)}{p} = \sum_{3\le p\le n}\frac{p-1}{p} > \sum_{3\le p\le n}\frac{1}{p}.$$

由于$\sum\limits_{3\le p\le n}\frac{1}{p}$是发散的. 因此, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{Z(k)}{k}$也是发散的.

定理9.2.9 对任意$m\ge 1$, 存在某个$n\ge 1$, 使得$Z(n)=m$.

9.2.2 包含伪Smarandache函数的方程

首先, 我们定义一个新的算术函数$U(n)$如下: $U(1) = 1$. 当$n > 1$且$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$为$n$的标准素因数分解式时, 定义:

$$U(n) = \max\{\alpha_1 p_1,\ \alpha_2 p_2,\ \cdots,\ \alpha_s p_s\}.$$

这个函数有时也被称为Smarandache可乘函数.

本小节的主要目的是利用初等方法研究方程

$$Z(n) = U(n) \text{ 及 } Z(n)+1 = U(n)$$

的可解性, 并获得了这两个方程的所有正整数解, 具体地说也就是证明了下面的:

定理9.2.10 对任意正整数$n>1$，函数方程

$$Z(n) = U(n)$$

成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中p为奇素数，m为$\frac{p+1}{2}$的任意大于1的因数. 即就是$m \mid \frac{p+1}{2}$且$m>1$.

证明: 事实上, 当$n = 1$时, 方程$Z(n) = U(n) = 1$成立. 当$n = 2$, 3, 4, 5时, 显然n不满足方程$Z(n) = U(n)$. 于是假定$n \ge 6$且满足方

程$Z(n)=U(n)$, 不妨设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$为$n$的标准素因数分解式, 并令$U(n)=U\left(p^{\alpha}\right)=\alpha p$. 于是由函数$Z(n)$及$U(n)$的定义可知$\alpha p$是最小的正整数使得$n$满足下面的整除式:

$$n \mid \frac{\alpha p(\alpha p+1)}{2}, \quad p^{\alpha} \mid n. \tag{9-1}$$

现在我们证明在(9-1)式中$\alpha=1$. 事实上如果$\alpha>1$, 则由$p^{\alpha}\mid n$立刻推出

$$p^{\alpha} \mid \frac{\alpha p(\alpha p+1)}{2}. \tag{9-2}$$

由于$(p,\ \alpha p+1)=1$, 所以由上式立刻推出$p^{\alpha-1}\mid\alpha$. 当p为奇素数时显然(9-2)式是不可能的, 因为此时$p^{\alpha-1}>\alpha$, 与$p^{\alpha-1}\mid\alpha$矛盾. 当$p=2$时, 推出$\alpha=2$. 这时(9-2)式成为$4\mid\dfrac{4\times 5}{2}=10$, 矛盾! 所以在(9-1)式中一定有$\alpha=1$且$p$为奇素数. 此时可设$n=p\cdot m$. 则由(9-1)式可推出$p\cdot m\mid\dfrac{p(p+1)}{2}$, 即就是$m\mid\dfrac{p+1}{2}$. 显然$m\neq 1$. 否则$n=p$, $Z(p)=p-1$, $U(p)=p$与$Z(n)=U(n)$矛盾! 而当$n=p\cdot m$, m为$\dfrac{p+1}{2}$的任意大于1的因数时, $Z(n)=p$, $U(n)=p$, 所以一定有$Z(n)=U(n)$. 从而推出$n>1$且满足方程$Z(n)=U(n)$当且仅当$n=p\cdot m$, m为$\dfrac{p+1}{2}$的任意大于1的因数. 于是完成了定理9.2.10的证明.

定理9.2.11 对任意正整数n，函数方程

$$Z(n)+1=U(n)$$

成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中p为奇素数，m为$\dfrac{p-1}{2}$的任意正因数. 即就是$m\mid\dfrac{p-1}{2}$.

证明: 显然$n=1$不满足方程$Z(n)+1=U(n)$. 于是不妨设$n>2$且满足方程$Z(n)+1=U(n)$, 并令$U(n)=U\left(p^{\alpha}\right)=\alpha p$. 于是由$Z(n)+1=U(n)$ 可得$Z(n)=\alpha p-1$. 再由函数$Z(n)$及$U(n)$的定义可推出

$$n \mid \frac{\alpha p(\alpha p-1)}{2}, \quad p^{\alpha} \mid n. \tag{9-3}$$

由于$(p,\ \alpha p-1)=1$, 所以由(9-3)式立刻推出$p^{\alpha-1}\mid\alpha$. 从而利用证明定理9.2.10的分析过程不难推出$\alpha=1$且p为奇素数. 所以可设$n=p\cdot m$. 再

利用(9-3)式不难推出$m \mid \frac{p-1}{2}$. 而当$n = p \cdot m$, m为$\frac{p-1}{2}$的任意正因数时, 容易验证n满足方程$Z(n)+1=U(n)$. 所以方程$Z(n)+1=U(n)$成立当且仅当$n = p \cdot m$, m为$\frac{p-1}{2}$的任意正因数. 于是完成了定理的证明.

综上所述, 显然我们的定理彻底解决了方程$Z(n)=U(n)$及$Z(n)+1=U(n)$的可解性问题. 也就是证明了这两个方程有无穷多个正整数解, 并给出了它们每个解的具体形式! 特别在区间[1, 100]中, 方程$Z(n)=U(n)$有9个解, 它们分别是$n = 1, 6, 14, 15, 22, 28, 33, 66, 91$. 而方程$Z(n)+1=U(n)$在区间[1, 50]中有19个解, 它们分别是$n = 3, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 26, 29, 31, 34, 37, 39, 41, 43, 47$.

9.2.3 关于伪Smarandache函数的两个问题

在文献[9]中, Kenichiro Kashihara博士论述了函数$Z(n)$的一些初等性质, 同时也提出了下面两个问题：

(A). 求方程$Z(n)=S(n)$ 的所有正整数解;

(B). 求方程$Z(n)+1=S(n)$ 的所有正整数解.

本小节的主要目的是利用初等方法研究方程(A)及(B)的可解性, 并获得了这两个方程的所有正整数解, 具体地说也就是证明了下面的：

定理9.2.12 对任意正整数$n>1$, 函数方程

$$Z(n)=S(n)$$

成立当且仅当$n = p \cdot m$, 其中p为奇素数, m为$\frac{p+1}{2}$的任意大于1的因数. 即就是$m \mid \frac{p+1}{2}$ 且$m>1$.

证明: 事实上当$n=1$时, 方程$Z(n)=S(n)$成立. 当$n = 2, 3, 4, 5$时, 显然不满足方程$Z(n)=S(n)$. 于是假定$n \geq 6$且满足方程$Z(n)=S(n)$, 不妨设$Z(n)=S(n)=k$. 由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义可知k是最小的正整数使得n满足下面的两个整除式:

$$n \mid \frac{k(k+1)}{2}, \quad n \mid k!. \tag{9-4}$$

首先我们证明在(9-4)式中$k+1$不可能为素数. 事实上如果$k+1$为素数, 不妨设$k+1=p$, 于是在$n \mid \frac{p(p-1)}{2}$中当$(n,\ p)=1$时, 立刻推出$n \mid \frac{p-1}{2}$.

从而n整除$\sum_{i=1}^{p-2} i = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$. 这与$k = p-1$为最小的正整数使得$n \mid \frac{k(k+1)}{2}$矛盾! 当$(n,\ p) > 1$时, 由于$p$为素数, 所以推出$p \mid n$. 再由于$n \mid k!$我们立刻得到$p|k!$. 这是不可能的, 因为$p = k+1$, 所以$p$不可能整除$(p-1)!$. 从而证明了在(9-4)式中$k+1$不可能为素数.

其次我们证明在(9-4)式中当k为奇数时k一定为素数. 事实上当k为奇数时$\frac{k+1}{2}$为整数, 若k为合数, 则当k可以分解成两个不同整数的乘积, 不妨设$k = a \cdot b$，$a > 1$, $b > 1$且$a \neq b$. 于是注意到$\left(k, \frac{k+1}{2}\right) = 1$, 不难推出$k = a \cdot b \mid (k-1)!$, $\frac{k+1}{2} \mid (k-1)!$及$\frac{k(k+1)}{2} \mid (k-1)!$. 再由于$n$整除$\frac{k(k+1)}{2}$我们立刻推出$n|(k-1)!$. 这与$k$是最小的正整数使得$n|k!$矛盾. 当$k$为合数且为某一素数的方幂时, 设$k = p^\alpha$且$\alpha \geq 2$. 由于$k$为奇数，所以$p \geq 3$, 从而$p$, $2p$, $\cdots$, $p^{\alpha-1}$均小于$k-1$且每个数都整除$(k-1)!$, 于是由n整除$\frac{k(k+1)}{2}$仍然可以推出$n|(k-1)!$. 这与k的定义矛盾! 所以当k为奇数时一定为素数!

结合以上两种情况我们推出当k为奇数时有$k = p$, 此时n整除$p!$及n整除$\frac{p(p+1)}{2}$. 但是当n整除$\frac{p+1}{2}$时, 显然有$S(n) < p$; 当$n = p$时$Z(n) \neq S(n)$. 所以我们可以设$n = p \cdot m$, 其中m是$\frac{p+1}{2}$的任一大于1的因数.

现在我们证明当$n = p \cdot m$, 其中m是$\frac{p+1}{2}$的任一大于1的因数时, 一定有$Z(n) = S(n)$. 事实上此时显然有$S(pm) = S(p) = p$. 因为m不整除$\sum_{i=1}^{p-1} i = \frac{p(p-1)}{2}$, 否则与$m$整除$\frac{p+1}{2}$矛盾! 所以$Z(pm) = p$, 从而$Z(pm) = S(pm)$.

最后, 我们证明不存在偶数k使得$Z(n) = S(n) = k$. 我们用反证法来证明这一结论. 假定存在偶数$k = 2m$使得$Z(n) = S(n) = k = 2m$, 则由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义可知n整除$\frac{k(k+1)}{2} = m(2m+1)$及$(2m)!$. 由前面的分析可知$2m+1$不可能为素数, 否则当$(n, 2m+1) = 1$时, n整除$\sum_{i=1}^{2m-1} i = m(2m-1)$, 显然这与$2m$是最小的正整数使得$n$整除$m(2m+1)$矛盾!当$(n, 2m+1) > 1$时, 由素数的性质立刻推出$p = 2m+1 \mid n$, 从

而再由$n \mid (2m)!$得到$p = 2m+1|(2m)!$, 矛盾! 所以$2m+1$不可能为素数, 同样可以证明m不可能为合数, 否则容易推出$n \mid (2m-1)!$, 与$2m$是最小的正整数使得$n \mid (2m)!$矛盾! 从而m为素数p, $k = 2p$. 于是可得$n \mid p(2p+1)!$及$n|(2p)!$，$S(n) = Z(n) = 2p$. 但是当n等于$p(2p+1)$的任一因数时都是不可能的! 也就是说对任意$k \mid p(2p+1)$, 不可能有$S(k) = 2p$. 于是完成了定理9.2.12的证明.

定理9.2.13 对任意正整数n，函数方程

$$Z(n) + 1 = S(n)$$

成立当且仅当$n = p \cdot m$, 其中p为奇素数, m为$\dfrac{p-1}{2}$的任意因数. 即就是$m \mid \frac{p-1}{2}$.

证明: 与定理9.2.12的证明方法相似, 这里只给出大概过程. 假定正整数n满足方程$Z(n)+1 = S(n)$, 并设$Z(n)+1 = S(n) = k$. 于是由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义不难推出k是最小的正整数使得

$$n \mid \frac{k(k-1)}{2}\ , \quad n \mid k!. \tag{9-5}$$

显然(9-5)式中当k为奇数时一定为素数! 否则可推出$n \mid (k-1)!$, 与k是最小的正整数使得$n \mid k!$矛盾. 因此$k = p$为一素数. 再由$n \mid \dfrac{p(p-1)}{2}$并注意$S\left(\dfrac{p-1}{2}\right) < p$, 立刻推出$n = p \cdot m$, m为$\dfrac{p-1}{2}$的任一正因数. 容易验证当$n = p \cdot m$, m为$\dfrac{p-1}{2}$的任一正因数时, n满足方程$Z(n)+1 = S(n)$.

当(9-5)式中$k = 2m$为偶数时, $k-1 = 2m-1$一定为素数, 从而可知不存在这样的正整数n使得$Z(n)+1 = S(n) = 2m$. 所以方程$Z(n)+1 = S(n)$成立当且仅当$n = p \cdot m$, 其中m为$\dfrac{p-1}{2}$的任一正因数. 于是完成了定理9.2.13的证明.

显然我们的定理彻底解决了问题(A)及(B). 也就是证明了这两个方程都有无穷多个正整数解, 并给出了它们每个解的具体形式! 特别在区间[1, 100]中, 方程$Z(n) = S(n)$有9个解, 它们分别是n = 1, 6, 14, 15, 22, 28, 33, 66, 91. 对于问题(B), 显然方程$Z(n)+1 = S(n)$在区间[1, 50]中有19个解, 它们分别是n = 3, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 26, 29, 31, 34, 37, 39, 41, 43, 47.

9.2.4 关于伪Smarandache函数的性质

关于伪Smarandache函数$Z(n)$性质的研究虽然取得了不少进展, 但是仍然存在不少问题! 为了便于有兴趣的读者进行参考和进一步研究, 这里我们介绍一些与函数$Z(n)$有关问题如下:

在文献[9]中, Kenichiro Kashihara博士建议我们研究

a). $|Z(n+1)-Z(n)|$,

b). $\dfrac{Z(n+1)}{Z(n)}$

是否有界.

在本小节中, 我们将解决这个问题. 即就是我们将证明下面的

引理9.2.1 *令k 和h 是任意正整数且$(h,\ k)=1$, 那么在级数$nk+h$中存在无穷多个素数, 其中$n=0,\ 1,\ 2,3,\ \cdots$.*

证明: 这是著名的Dirichlet 定理, 参见文献[7].

定理9.2.14 *对足够大的任意正整数M, 有无穷多个正整数n 满足*

$$\frac{Z(n+1)}{Z(n)}>M \quad 和 \quad |Z(n+1)-Z(n)|>M.$$

由此可知, $|Z(n+1)-Z(n)|$ 和$\dfrac{Z(n+1)}{Z(n)}$ 是无界的.

证明: 现在我们利用引理来证明定理. 事实上, 对任意正整数M, 我们取m满足$2^m>M$. 注意到$\left(2^{2m+1},\ 2^m+1\right)=1$, 因此根据Dirichlet定理, 我们立即得到: 在级数

$$2^{2m+1}k+2^m+1,\quad 其中\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

中存在无穷多个素数.

于是, 一定存在一个正整数k_0满足$2^{2m+1}k_0+2^m+1=P$ 是素数. 对于素数P, 根据$Z(n)$的定义有

$$Z(P)=P-1=2^{2m+1}k_0+2^m,$$
$$Z(P-1)=Z(2^{2m+1}k_0+2^m)=Z(2^m(2^{m+1}k_0+1)).$$

因为

$$\sum_{i=1}^{2^{m+1}k_0} i=\frac{2^{m+1}k_0(2^{m+1}k_0+1)}{2}$$

和$2^m(2^{m+1}k_0+2^m)$ 均整除$\displaystyle\sum_{i=1}^{2^{m+1}k_0} i$, 于是有

$$Z(P-1)\leq 2^{m+1}k_0.$$

因此

$$\frac{Z(P)}{Z(P-1)}\geqslant\frac{2^{2m+1}k_0+2^m}{2^{m+1}k_0}>2^m>M.$$

所以$\frac{Z(P)}{Z(P-1)}$无界.

同理可得

$$\begin{aligned}|Z(P)-Z(P-1)| &\geq |Z(P)|-|Z(P-1)|\\ &\geq 2^{2m+1}k_0+2^m-2^{m+1}k_0\\ &= 2^{m+1}k_0(2^m-1)+2^m>2^m>M.\end{aligned}$$

因此$|Z(P)-Z(P-1)|$ 也是无界的.

因为有无穷多个正整数m 满足$2^m>M$, 因此也有无穷多个正整数n满足$|Z(n+1)-Z(n)|$ 和$\dfrac{Z(n+1)}{Z(n)}$ 是无界的. 这就完成了定理的证明.

9.3 伪Smarandache函数的新问题

定义9.2: $Z^2(n)=Z(Z(n))$, 一般地, $Z^k(n)=Z(Z(\cdots Z(n)\cdots))$, 这里函数$Z$重复了$k$次.

问题9.1: 对于给定的一组整数k, $m\in N$, 试求满足方程$Z^k(n)=m$的所有正整数解.

问题9.2: 求方程$S(Z(n))=Z(S(n))$的所有正整数解. 猜测该方程最多有有限个正整数解.

问题9.3: 考察下面两组数之间的关系

(1) $Z(m+n)$与$Z(m)$, $Z(n)$,

(2) $Z(mn)$与$Z(m)$, $Z(n)$.

问题9.4: 寻求下面方程的所有正整数解

(1) $Z(n)=Z(n+1)$,

(2) $Z(n)$整除$Z(n+1)$,
(3) $Z(n+1)$整除$Z(n)$.

对于$Z(n)$的前50个值, 我们得到满足(2)的有:

$$Z(6)|Z(7),\ Z(22)|Z(23),\ Z(28)|Z(29),\ Z(30)|Z(31),\ Z(46)|Z(47).$$

满足(3)的有:

$$Z(10)|Z(9),\ Z(18)|Z(17),\ Z(26)|Z(25),\ Z(42)|Z(41),\ Z(50)|Z(49).$$

然而, 我们没有找到满足$Z(n)=Z(n+1)$的正整数.

问题9.5: 寻求下面方程的所有正整数解
(1) $Z(n)+Z(n+1)=Z(n+2)$,
(2) $Z(n)=Z(n+1)+Z(n+2)$,
(3) $Z(n)\cdot Z(n+1)=Z(n+2)$,
(4) $Z(n)=Z(n+1)\cdot Z(n+2)$,
(5) $2Z(n+1)=Z(n)+Z(n+2)$,
(6) $Z(n+1)\cdot Z(n+1)=Z(n)\cdot Z(n+2)$,

问题9.6: 对于任意给定的正整数m, 寻求满足$Z(n)=m$的所有正整数n.

问题9.7: (1) 寻求满足$Z(n)$, $Z(n+1)$, $Z(n+2)$, $Z(n+3)$递增的所有正整数n,
(2) 寻求满足$Z(n)$, $Z(n+1)$, $Z(n+2)$, $Z(n+3)$递减的所有正整数n.

对于$Z(n)$的前35个值, 我们有递增数列:

$$Z(6)=3<Z(7)=6<Z(8)=15,$$

$$Z(21)=6<Z(22)=11<Z(23)=22,$$

$$Z(30)=15<Z(31)=30<Z(32)=63.$$

有递减数列:

$$Z(8)=15>Z(9)=8>Z(10)=4,$$

$$Z(13) = 12 > Z(14) = 7 > Z(15) = 5,$$

$$Z(16) = 31 > Z(17) = 16 > Z(18) = 8.$$

问题9.8: 函数$Z(n)$的值分布很不规则，对有些n如$n = \frac{m(m+1)}{2}$, 有$Z(n) = m < \sqrt{2n}$. 而对于另一些n如$n = 2^\alpha$, 有$Z(n) = 2^{\alpha+1} - 1 = 2n - 1$. 因此有必要研究$Z(n)$的均值性质，给出均值

$$\sum_{n\leq x} Z(n), \quad \sum_{n\leq x} \ln(Z(n)), \quad \sum_{n\leq x} \frac{1}{Z(n)}$$

的一个渐近公式.

问题9.9: 求方程$Z(n) = \phi(n)$的所有正整数解, 其中$\phi(n)$为Euler函数. 这一方程有无限多个正整数解, 例如当n为素数p时均满足方程. 当$n = 2p$且$p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$时, n也满足该方程. 除了这些平凡解外，是否还有其它正整数解是一个公开的问题. 猜测该方程只有$n = 1$以及上述两种解.

第十章 一些新的Smarandache序列

10.1 一些新的Smarandache序列的新问题

问题10.1: *以1为尾数的 Smarandache 重复数字序列*

$$111,\ 1221,\ 13331,\ 144441,\ 1555551,\ 16666661,\ 177777771,$$

$$1888888881,\ 19999999991,\ 110101010101010101010101,\cdots$$

以上序列的数均从n开始并重复n次并且数的左右两端都加1.

上述序列有多少项是素数？观察得到每一项数字之和是n^2+2. 那么如果$\frac{n^2+2}{3}$是一个整数, 那么第n项就不是一个素数.

问题10.2: *以n为尾数的 Smarandache 重复数字广义序列*

$$n1n,\ n22n,\ n333n,\ n4444n,\ n55555n,\ n666666n,$$

$$n7777777n,\ n88888888n,\ \cdots$$

其中n是任意正整数.

求出此序列的通项.

问题10.3: *Smarandache交错相邻倒序序列*

$$1,\ 21,\ 123,\ 4321,\ 12345,\ 654321,\ 1234567,$$

$$87654321,\ 123456789,\ 10987654321,\ 1234567891011,\cdots$$

左边以1开始且奇数项是相邻整数. 右边以1开始并且偶数项是相邻的倒序整数.

在这个序列中有多少素数？

我们发现在这个序列中第n项有n个数.

当然由定义可得每一项各位数字之和是$\frac{m(m+1)}{2}$.

问题10.4: *Smarandache交错相邻倒序素数序列($SACRP$)*

$$2,\ 32,\ 235,\ 7532,\ 235711,\ 13117532,\ 2357111317,$$

$$1917117532,\ 23571113171923, \cdots$$

以上序列奇数项左端以2开始且是相邻素数. 偶数项也是相邻素数但是倒序的, 右端以2开始.

在这个序列中有多少素数?

我们发现一些项的各位数字之和是素数. 有多少项是素数且它们的各位数字之和也是素数?

我们定义"可加素数"是素数且各位数字之和也是素数.

在这些序列中是否有完全平方项, 完全立方项.

问题10.5: Smarandache交错相邻倒序Fibonacci序列

$$1,\ 11,\ 112,\ 3211,\ 11235,\ 853211,\ 11235813,$$

$$2113853211,\ 112358132134, \cdots$$

估计$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(n)}{a(n+1)}$的值, 这个极限收敛吗?

问题10.6: Smarandache可加平方序列.

$$1,\ 4,\ 9,\ 36,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196,$$

$$225,\ 324,\ 400,\ 441,\ 484,\ 529,\ 900,\ 961, \cdots$$

我们观察可得以上平方序列的每一项的各位数字之和仍然是个平方数.

这个数列有无穷多项吗?

问题10.7: Smarandache 可加立方序列.

$$1,\ 8,\ 125,\ 512,\ 1000,\ 1331,\ 8000,\ 19683,\ 35937, \cdots$$

我们观察可得以上平方序列的每一项的各位数字之和仍然是个立方数.

这个数列有无穷多项吗?

估计下面连续的一般分式的值:

$$a(1)+\cfrac{b(1)}{a(2)+\cfrac{b(2)}{a(3)+\cfrac{b(3)}{a(4)+\cfrac{b(4)}{a(5)+\cdots}}}}.$$

其中$a(n)$是 Smarandache 可加平方序列, $b(n)$是 Smarandache 可加立方序列.

问题10.8: Smarandache可乘平方序列.

$$1,\ 4,\ 9,\ 49,\ 144,\ 289,\cdots$$

我们观察可得以上序列的每一项的各位数字之积仍然是个平方数.

这个数列有无穷多项吗?

在这个序列中有多少项是可加平方数?

问题10.9: Smarandache 可乘Fibonacci 数列.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\cdots$$

我们观察可得以上序列的每一项的各位数字之积仍然是个Fibonacci数.

这个数列有无穷多项吗?

这个数列有多少项是素数?

问题10.10: 积性数列.

$$2,\ 3,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 48,\ 54,\cdots$$

一般定义: 设m_1, m_2 是数列的前两项, 则当$k \geq 3$时, m_k等于前两个不同项的乘积的最小者. $k \geq 3$ 的所有项都可以被m_1, m_2整除.

研究这个序列的性质.

问题10.11: Smarandache 可乘数列.

$$1,\ 24,\ 369,\ 481216,\ 510152025,\ 61218243036,$$

$$7142128354249,\ 816243240485664$$

以上序列第n项是由以下数并联可得$n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ \cdots\ n\cdot n$.

这个序列有多少项是素数?

估计$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{k}\dfrac{a(k+1)}{a(k)}$ 的值.

问题10.12: Smarandache 左–右自然数序列.

$$1,\ 21,\ 213,\ 4213,\ 42135,\ 642135,\ 6421357,\ 86421357,$$

$$10864213579,\ 1086421357911,\ 121086421357911,\ \cdots.$$

这个序列从1开始, 首先左边加自然数, 然后右边加. 这个序列从1 开始, 首先左边加自然数, 然后右边加.

这个序列第n 项有n 个数且这n 个数的和等于$\frac{n(n+1)}{2}$.

观察这些项的末尾数字构成数列1, 1, 3, 3, 5, 5, , 7, , 9, $\cdots$.

求出这个数列的通项$a(n)$.

确定这个数列有多少项是素数?

观察可得对于$n=(2\cdot k+1)\cdot 5$和$n=(2\cdot k+1)\cdot 5+1$的项$a(n)$, 他们的末尾数字等于5 且他们一定不是一个素数. 而且各位数字之和是3 的倍数的项也一定不是一个素数, 也就是说对于这个数列第n 项有$\frac{n\cdot(n+1)}{2}=3\cdot m$, 其中$m$是自然数.

问题10.13: Smarandache *右−左自然数序列.*

$$1,\ 12,\ 312,\ 3124,\ 53124,\ 531246,\ 7531246,\ 75312468,$$
$$975312468,\ 97531246810,\ \cdots.$$

这个序列从1 开始, 首先右边加自然数, 然后左边加.

这个序列第n 项有n 个数且这n 个数的和等于$\frac{n(n+1)}{2}$.

观察这些项的末尾数字构成数列2, 2, 4, 4, 6, 6, , 8, , 0, $\cdots$ 且只有第一项等于1.

估计关于这个序列的连分式和连根式的值.

问题10.14: Smarandache *左−右素数序列.*

$$2,\ 32,\ 325,\ 7325,\ 732511,\ 13732511,\ 1373251117,\ 191373251117,$$
$$19137325111723,\ 2919137325111723,\ \cdots.$$

这个序列从素数2 开始, 首先左边加素数, 然后右边加相邻的素数.

第n项的各位数字之和约等于$\frac{n^2}{2\cdot\ln(n)}$.

这个数列中有多少项是素数?

这个数列有多少项是可加素数?

问题10.15: Smarandache *右−左素数序列.*

$$2,\ 23,\ 523,\ 5237,\ 115237,\ 11523713,\ 1711523713,\ 171152371319,$$

$$23171152371319,\ 2317115237131929,\ \cdots.$$

这个序列从素数2 开始, 首先右边加素数, 然后左边加相邻的素数.

这个数列中有多少项是素数?

设$a(n)$是 Smarandache 左–右素数序列, $b(n)$是 Smarandache 右–左素数序列. 估计下面 Smarandache一般连分式的值:

$$a(1)+\cfrac{b(1)}{a(2)+\cfrac{b(2)}{a(3)+\cfrac{b(3)}{a(4)+\cfrac{b(4)}{a(5)+\cdots}}}}.$$

问题10.16: Smarandache *左–右广义序列.*

设$a(n)$是$n\geq 1$的任意序列. 那么 Smarandache 左–右广义序列是由以下数并联而成:

$$a(1),\ a(1)a(2),\ a(3)a(1)a(2),\ a(3)a(1)a(2)a(4),\ a(5)a(3)a(1)a(2)a(4),\cdots$$

这个序列除了$a(1)$外有多少项属于数列$a(n)$?

问题10.17: Smarandache *右–左广义序列.*

设$a(n)$是$n\geq 1$的任意序列. 那么 Smarandache 右–左广义序列是由以下数并联而成:

$$a(1),\ a(2)a(1),\ a(2)a(1)a(3),\ a(4)a(2)a(1)a(3),\ a(4)a(2)a(1)a(3)a(5),\cdots$$

这个序列除了$a(1)$外有多少项属于数列$a(n)$?

问题10.18: *相邻序列.*

$$1,\ 12,\ 123,\ 1234,\ 12345,\ 123456,\ 1234567,\ 12345678,\ 123456789,$$

$$12345678910,\ 1234567891011,\ 123456789101112,\ 12345678910111213,\cdots.$$

这个序列中有多少个素数?

问题10.19: 循环序列.

$$1,\ 12,\ 21,\ 123,\ 231,\ 312,\ 1234,\ 2341,\ 3412,\ 4123,$$
$$12345,\ 23451,\ 34512,\ 45123, 1234,\ 123456,\ 234561, 45612,$$
$$456123,\ 561234,\ 612345,\ 1234567,\ 2345671,\ 3456712\cdots.$$

这个序列中有多少个素数?

问题10.20: 对称序列.

$$1,\ 11,\ 121,\ 1221,\ 12321,\ 123321,\ 1234321, 2344321,$$
$$123454321,\ 1234554321, 12345654321,\ 123456654321,$$
$$1234567654321, 12345677654321,\ 123456787654321,$$
$$1234567887654321, 12345678987654321, 123456789987654321,$$
$$12345678910987654321, 2345678910109876543 21,$$
$$1234567891011109876543 21, 23456789101111109876543 21,\cdots.$$

这个序列中有多少个素数?

问题10.21: 重复序列.

$$12,\ 1342,\ 135642,\ 13578642,\ 13579108642,\ 135791112108642,$$
$$1357911131412108642,\ 13579111315161412108642,$$
$$135791113151718161412108642,$$
$$1357911131517192018161412108642,\cdots$$

这个序列中是否有完全幂数?我们猜想:没有!

问题10.22: 立方积数列.

$$2,\ 9,\ 217,\ 13825,\ 1728001,\ 373248001,\ 128024064001,$$
$$65548320768001,\cdots$$

$C_n = 1 + c_1 c_2 \cdots c_n$, 其中$c_k$是第$k$个立方数.
这个序列中有多少个素数?

问题10.23: 阶乘积数列.

$$2,\ 3,\ 13,\ 289,\ 34561,\ 24883201,\ 125411328001,$$
$$5056584744960001, \cdots$$

$F_n = 1 + f_1 f_2 \cdots f_n$, 其中$f_k$是第$k$个阶乘数.
这个序列中有多少个素数?

问题10.24: 数列的子列.

a)渐增子数列.

$$1,\quad 1,2,\quad 1,2,3,\quad 1,2,3,4,\quad 1,2,3,4,5,\quad 1,2,3,4,5,6,$$
$$1,2,3,4,5,6,7,\quad 1,2,3,4,5,6,7,8, \cdots$$

b)渐减子数列.

$$1,\quad 2,1,\quad 3,2,1,\quad 4,3,2,1,\quad 5,4,3,2,1,\quad 6,5,4,3,2,1,$$
$$7,6,5,4,3,2,1,\quad 8,7,6,5,4,3,2,1, \cdots$$

c)渐增锥形子数列.

$$1,\quad 1,2,1,\quad 1,2,3,2,1,\quad 1,2,3,4,3,2,1,$$
$$1,2,3,4,5,4,3,2,1,\quad 1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1, \cdots$$

d)渐减锥形子数列.

$$5,4,3,2,1,2,3,4,5,\quad 6,5,4,3,2,1,2,3,4,5,6 \cdots$$

e)渐增对称子数列.

$$1,1,\quad 1,2,2,1,\quad 1,2,3,3,2,1,\quad 1,2,3,4,4,3,2,1,$$
$$1,2,3,4,5,5,4,3,2,1,\quad 1,2,3,4,5,6,6,5,4,3,2,1, \cdots$$

f)渐减对称子数列.

$$1,1,\quad 2,1,1,2,\quad 3,2,1,1,2,3,\quad 4,3,2,1,1,2,3,4,$$

$$5,4,3,2,1,1,2,3,4,5,\quad 6,5,4,3,2,1,1,2,3,4,5,6,\cdots$$

g)置换子数列.

$$1,2,\quad 1,3,4,2,\quad 1,3,5,6,4,2,\quad 1,3,5,7,8,6,4,2,$$

$$1,3,5,7,9,8,6,4,2,\quad 1,3,5,7,9,10,8,6,4,2,\cdots$$

寻找以上每一个数列的通式.

问题10.25: 毗连自然数列.

1, 22, 333, 4444, 55555, 666666, 7777777, 88888888, 999999999,

10101010101010101010, 1111111111111111111111,

121212121212121212121212, 13131313131313131313131313,

1414141414141414141414141414, 51515151515151515151515151515, ⋯

研究这个序列的性质.

问题10.26: 毗连素数数列.

2, 23, 235, 2357, 235711, 23571113, 2357111317,

235711131719, 23571113171923, ⋯

研究这个序列的性质.

问题10.27: 倒置毗连素数数列.

2, 32, 532, 7532, 117532, 13117532, 1713117532,

191713117532, 23191713117532, ⋯

研究这个序列的性质.

问题10.28: 毗连奇数数列.

$$1,\ 13,\ 135,\ 1357,\ 13579,\ 1357911,\ 135791113,$$

$$13579111315,\ 1357911131517, \cdots$$

研究这个序列的性质.

问题10.29: 毗连偶数数列.

$$2,\ 24,\ 246,\ 2468,\ 246810,\ 24681012,$$

$$2468101214,\ 246810121416, \cdots$$

研究这个序列的性质.

问题10.30: 倒置毗连偶数数列.

$$2,\ 42,\ 642,\ 8642,\ 108642,\ 12108642,$$

$$1412108642,\ 161412108642, \cdots$$

研究这个序列的性质.

问题10.31: 毗连平方数列.

$$1,\ 14,\ 149,\ 14916,\ 1491625,\ 149162536,$$

$$14916253649,\ 1491625364964, \cdots$$

研究这个序列的性质.
这个序列中有多少个完全平方数?

问题10.32: 倒置毗连平方数列.

$$1,\ 41,\ 941,\ 16941,\ 2516941,\ 362516941,$$

$$49362516941,\ 6449362516941, \cdots$$

研究这个序列的性质.
这个序列中有多少个完全平方数?

问题10.33: 毗连立方数列.

$$1,\ 18,\ 1827,\ 182764,\ 182764125,$$

$$182764125216,\ 182764125216343, \cdots$$

研究这个序列的性质.
这个序列中有多少个完全立方数?

问题10.34: 倒置毗连立方数列.

$$1,\ 81,\ 2781,\ 642781,\ 125642781,$$

$$216125642781,\ 343216125642781, \cdots$$

研究这个序列的性质.
这个序列中有多少个完全立方数?

问题10.35: 毗连斐波那契数列.

$$1,\ 11,\ 112,\ 1123,\ 11235,\ 112358,\ 11235813,$$

$$1123581321,\ 112358132134, \cdots$$

研究这个序列的性质.
这个序列中有斐波那契数吗?

问题10.36: 倒置毗连斐波那契数列.

$$1,\ 11,\ 211,\ 3211,\ 53211,\ 853211,\ 13853211,$$

$$2113853211,\ 342113853211, \cdots$$

研究这个序列的性质.
这个序列中有斐波那契数吗?

问题10.37: 关于 Smarandache Pierced链.

当$n \geq 1$ 时, $c(n) = 101 \times (10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^4 + 1)$ 定义为 Smarandache Pierced链. 前几项为:

$$101,\ 1010101,\ 10101010101,\ 101010101010101,$$

$$1010101010101010101,\ \cdots\cdots$$

研究这个序列的性质.

在序列$\left\{\frac{c(n)}{101}\right\}$中有多少个素数? Kashihara Kenichiro博士在文献[9]中完全解决了这个问题, 并且证明了在序列$\left\{\frac{c(n)}{101}\right\}$中没有素数.

当$n \geq 2$时, 序列$\left\{\frac{c(n)}{101}\right\}$是无平方因子序列吗?

定理10.37: 对于任意正整数n满足$9 \mid n$, 我们有$9 \mid c(n)$.

显然$(101,\ 9) = 1$, 因此9整除$\frac{c(n)}{101}$.

推论10.37: 有无穷多个正整数n使得$\frac{c(n)}{101}$不是无平方因子数.

证明: 我们用初等方法完成定理的证明. 首先我们定义k-free数: 设$k \geq 2$是给定的正整数. 对于任意正整数$n > 1$, 我们称n是k-free数, 如果对于任意素数p满足$p|n$, 那么$p^k \dagger n$. 我们称2-free数为无平方因子数; 3-free数为无立方因子数. 现在我们直接证明定理. 很显然

$$10 \equiv\ 1(\text{mod}\ 9).$$

如果$a \equiv\ b(\text{mod}\ m)$, 那么$a^n \equiv\ b^n(\text{mod}\ m)$ 对于每一个正整数n , 我们有

$$10^{4n-4} \equiv\ 1(\text{mod}\ 9),$$
$$10^{4n-8} \equiv\ 1(\text{mod}\ 9),$$
$$\cdots\cdots$$
$$10^{4n} \equiv\ 1(\text{mod}\ 9).$$

显然

$$1 \equiv\ 1(\text{mod}\ 9).$$

因此,

$$\frac{c(n)}{101} = 10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^4 + 1 \equiv\ n(\text{mod}\ 9).$$

我们立即得到

$$\frac{c(n)}{101} \equiv 10^{4n-4} + 10^{4n-8} + \cdots + 10^4 + 1 \equiv\ n\ \equiv\ 0(\text{mod}\ 9).$$

由无平方因子数的定义和以上性质我们可得当$9|n$, $\frac{c(n)}{101}$不是无平方因子数.

这就完成了定理的证明.

10.2 关于立方阶序列

10.2.1 立方阶序列的新问题

定义10.2.1 令$\{p_n\}$表示素数序列, 素数立方阶序列$\{x_n\}$定义为满足$p_n^{x_n}-1\equiv 0(\text{mod }p_{n+1})$的最小正整数$x_n$.

该序列的前几项的值为:

$$2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 4,\ 9,\ 22,\ 7,\ 10,\ 4,\ 10,\ 7,\ 46,\ 13,$$

$$29,\ 60,\ 66,\ 70,\ 18,\ 39,\ 82,\ 88,\cdots.$$

研究这个序列的性质.

猜想1: 在素数立方阶序列$\{x_n\}$中, 除了第一项之外, 其余项都是偶数.

猜想2: 在素数立方阶序列$\{x_n\}$中, 有无穷多个素数.

猜想3: 在素数立方阶序列$\{x_n\}$中, 有无穷多个平方数.

定义10.2.2 令$\{s_n\}$表示平方序列$s_n=n^2$, 平方阶序列$\{y_n\}$定义为满足$s_n^{y_n}-1\equiv 0(\text{mod }s_{n+1})$的最小正整数$y_n$.

该序列的前几项的值为:

$$1,\ 3,\ 2,\ 5,\ 3,\ 7,\ 4,\ 9,\ 5,\ 11,\ 6,\ 13,\ 7,\ 15,\ 8,\ 17,\cdots.$$

研究这个序列的性质.

定理10.2.1 对于平方阶序列, 我们有

$$y_n=\begin{cases}k, & n=2k-1,\\ 2k+1, & n=2k\end{cases}$$

证明: 根据平方阶序列的定义, 我们有

$$n^{2y}-1=(n^2-1)(n^{2y-2}+n^{2y-4}+\cdots+n^2+1)\equiv 0(\text{mod }(n+1)^2).$$

若$(n-1,\ n+1)=1$, 则有

$$n^{2y-2}+n^{2y-4}+\cdots+n^2+1\equiv 0(\text{mod }(n+1))$$

因此可得$y=n+1$.

若$(n-1,\ n+1)=2$, 则有

$$n^{2y-2}+n^{2y-4}+\cdots+n^2+1\equiv 0\left(\text{mod }\frac{n+1}{2}\right)$$

因此可得$y=\frac{n+1}{2}$.

这就完成了定理的证明.

10.2.2 关于立方阶数列及其两个猜想

对任意正整数n, 设$\{c_n\}$表示立方数列, 即$c_n=n^3$. 而立方阶数列$\{x_n\}$定义为最小的正整数x_n使得$c_n^{x_n}\equiv 1(\text{mod }c_{n+1})$. 例如数列$\{x_n\}$的前几项为：$x_1=1$, $x_2=6$, $x_3=16$, $x_4=50$, $x_5=6$, $x_6=98$, $x_7=64$, $x_8=54$, $x_9=50$, $x_{10}=242$, $x_{11}=12$, $\cdots$. 关于数列$\{x_n\}$的性质, 我们目前知道的很少, 甚至还没有人研究这一问题! 在文献[9]中, Kenichiro Kashihara介绍了这一数列, 同时提出了关于立方阶数列$\{x_n\}$的两个猜想:

(A): 数列$\{x_n\}$中除了第一项外, 其余项都是偶数;

(B): 在数列$\{x_n\}$中存在无限多个平方数.

本节的主要目的是利用初等方法研究数列$\{x_n\}$的计算问题, 并给出了x_n的具体表示形式. 作为本文结果的实际应用, 我们完全解决了Kenichiro Kashihara博士提出的以上两个猜想, 即就是证明了猜想(A)及猜想(B)是正确的! 具体地说也就是证明了下面的:

定理10.2.2. 对任意正整数n, $\{x_n\}$定义如上, 则我们有表示式

(a). $x_n=(n+1)^2$, 如果$n\equiv 1\ (\text{mod }6)$ 或者$n\equiv 3\ (\text{mod }6)$,

(b). $x_n=2(n+1)^2$, 如果$n\equiv 0\ (\text{mod }6)$ 或者$n\equiv 4\ (\text{mod }6)$,

(c). $x_n=\frac{1}{3}\cdot(n+1)^2$, 如果$n\equiv 5\ (\text{mod }6)$,

(d). $x_n=\frac{2}{3}\cdot(n+1)^2$, 如果$n\equiv 2\ (\text{mod }6)$.

显然由此定理立刻推出除了x_1外, 其它所有x_n $(n>1)$均为偶数. 同时由定理的(a)知数列$\{x_n\}$包含无穷多个完全平方数. 从而完全解决了Kenichiro Kashihara博士提出的两个猜想!

证明: 首先给出猜想(A)的简单证明. 事实上对任意正整数$n > 1$, 设y是最小的正整数使得

$$n^{3y} \equiv 1(\bmod\ (n+1)^3). \tag{10-1}$$

则由(10-1)式及二项式定理可得

$$n^{3y} - 1 = (n+1-1)^{3y} \equiv (-1)^{3y} - 1 \equiv (-1)^y - 1 \equiv 0\ (\bmod\ (n+1)).$$

由上式立刻推出y一定为偶数! 所以当$n > 1$时, x_n一定为偶数. 于是证明了猜想(A).

为计算x_n的具体值, 我们继续应用同余式(10-1)及二项式定理并注意y为偶数可得:

$$\begin{aligned} n^{3y} - 1 &= (n+1-1)^{3y} - 1 \\ &\equiv \frac{3y(3y-1)}{2} \cdot (n+1)^2 - 3y(n+1) \\ &\equiv 0\ (\bmod\ (n+1)^3). \end{aligned} \tag{10-2}$$

由上式也可以推出同余式

$$-3y(n+1) \equiv 0\ (\bmod\ (n+1)^2). \tag{10-3}$$

我们分几种情况讨论: 当$(3,\ n+1) = 1$时, 由(10-3)式立刻推出$y = k(n+1)$, 其中k为任意正整数. 将$y = k(n+1)$代入(10-2)式可得

$$\frac{3k(3k(n+1)-1)}{2} \cdot (n+1)^3 - 3k(n+1)^2 \equiv 0\ (\bmod\ (n+1)^3). \tag{10-4}$$

由于y为偶数, 所以当$n+1$为偶数时, (10-4)式的最小正整数解为$k = n+1$. 此时注意到$2|n+1$, $(3,\ n+1) = 1$, 从而$n = 6t+1$或者$n = 6t+3$, 其中t为任意非负整数. 所以当n为形如$6t+1$或者$6t+3$的正整数(其中t为任意正整数)时, 满足$n^{3x_n} \equiv 1\ (\bmod\ (n+1)^3)$的最小正整数$x_n$为$x_n = (n+1)^2$.

同样当$n+1$为奇数时, 注意到y为偶数，所以(10-4)式的最小正整数解仍为$k = 2(n+1)$. 此时注意到$(6,\ n+1) = 1$, 从而$n = 6t$或者$n = 6t+4$, 其中t为任意非负整数. 所以当n为形如$6t$或者$6t+4$的正整数(其中t为任意正整数)时, 满足$n^{3x_n} \equiv 1\ (\bmod\ (n+1)^3)$ 的最小正整数x_n为$x_n = 2(n+1)^2$.

当$(3,\ n+1) > 1$, 即就是$3 \mid n+1$时, 由(10-3)式立刻推出$y = \dfrac{1}{3}k(n+1)$, 其中k为任意正整数. 将$y = \dfrac{1}{3}k(n+1)$代入(10-2)式可得

$$\frac{k(k(n+1)-1)}{2} \cdot (n+1)^3 - k(n+1)^2 \equiv 0 \pmod{(n+1)^3}. \quad (10\text{-}5)$$

显然当$2|n+1$时, 满足(10-5)式的最小正整数$k = n+1$. 此时注意到$6|n+1$, 即就是$n = 6t+5$, 所以当n为形如$6t+5$的正整数(其中t为任意正整数)时, 满足同余方程 $n^{3x_n} \equiv 1 \pmod{(n+1)^3}$ 的最小正整数x_n为$x_n = \frac{1}{3} \cdot (n+1)^2$.

而当$(2,\ n+1) = 1$时, 注意到y为偶数, 所以满足(10-5)式的最小正整数$k = 2(n+1)$. 此时注意到$3|n+1$, $(2,\ n+1) = 1$, 即就是$n = 6t+2$, 所以当n为形如$6t+2$ 的正整数(其中t为任意正整数)时, 满足同余方程 $n^{3x_n} \equiv 1 \pmod{(n+1)^3}$ 的最小正整数x_n为$x_n = \dfrac{2}{3} \cdot (n+1)^2$. 由于$n \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \pmod 6$覆盖了所有自然数, 从而完成了定理的证明!

第十一章 关于Smarandache问题的一些注释

11.1 关于素数的五个猜想

(1) 方程

$$p_{n+1}^x - p_n^x = 1$$

其中p_n是第n个素数. 在0.5和1之间, 该方程有唯一解.

当$n = 1$时, 方程有最大解. 即就是:

$$3^x - 2^x = 1, \quad x = 1;$$

当$n = 31$时, 方程有最小解. 即就是:

$$127^x - 113^x = 1, \quad x = 0.567148\cdots = a_0.$$

因此, Andrica猜想

$$A_n = p_{n+1}^{\frac{1}{2}} - p_n^{\frac{1}{2}} < 1$$

可推广为：

(2) $B_n = p_{n+1}^a - p_n^a < 1$, 其中$a < a_0$.

(3) $C_n = p_{n+1}^{\frac{1}{k}} - p_n^{\frac{1}{k}} < \dfrac{2}{k}$, 其中$k \geq 2$.

(4) $D_n = p_{n+1}^a - p_n^a < \dfrac{1}{n}$, 其中$a < a_0$且$n$足够大. 对于无穷多个相邻的素数, $n = n(a)$成立.

(a) 当$a_0 < a < 1$时, 上式是否成立.

(b) 是否存在正整数n_0(依赖于a和n), 使得当$n \geq n_0$时, (4)式成立.

(5) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \leq \dfrac{5}{3}$, 当$n = 2$时等号成立. Jozsef Sandor教授已经证明了该猜想(参阅文献[56]).

11.2 Smarandache可拆分逆序列

Smarandache 可拆分序列(SDS)是:

$$1,\ 23,\ 456,\ 7891,\ 23456,\ 789123, \cdots.$$

Smarandache 可拆分逆序列是: 1, 32, 654, 1987, 65432, $\cdots$, 此序列中有多少项是素数.

11.3 Smarandache同余函数

Smarandache同余函数定义为: 对任意给定的正整数m, 有

$$L: \ Z \to Z$$
$$L(x,\ m) = (x + c_1)\cdots(x + c_{\varphi(m)})$$

其中φ是Euler函数, c_1, $\cdots$, $c_{\varphi(m)}$是模m的简化剩余系.

研究Smarandache同余函数的性质.

11.4 Smarandache φ定理

对任意正整数z, m, 且$m \neq 0$, 则有

$$a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s (mod\ m),$$

其中φ是Euler函数, m_s和s可通过Smarandache φ 算法得到:

第一步:

$$A := a$$
$$M := m$$
$$i := 0$$

第二步: 计算$d = (A,\ M)$, $M' = \dfrac{M}{d}$.

第三步: 当$d = 1$时, 取$s = i$, $m_s = M'$,
当$d \neq 1$时, 取$A := d$, $M = M'$, $i := i + 1$, 转第二步.

Euler定理的推广:

对任意正整数a, m, 且$(a,\ m) = 1$, 则有$a^{\varphi(m)} \equiv 1(modm)$.

Smarandache totient函数定义为:

$$s\varphi: \ \ Z^2 \to Z^2$$

当$m \neq 0$, $s\varphi(a,\ m) = (m_s,\ s)$时, 有$a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s (mod\ m)$.

研究Smarandache φ定理, Smarandache φ算法, Smarandache totient函数.

11.5 Smarandacheials

对任意正整数n, k, 设$n > k \geq 1$, Smarandacheials定义为:

$$!n!_k = \prod_{\substack{0<|n-k\cdot i|\leq n \\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots}} (n - k \cdot i)$$

例如:

(1) 当$k = 1$时:

$$\begin{aligned} !n!_1 &= \ !n! = \prod_{\substack{0<|n-i|\leq n \\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots}} (n - i) = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) \\ & \quad (-1)(-2)\cdots(-n+2)(-n+1)(-n) \\ &= (-1)^n (n!)^2. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} !5! &= 5(5-1)(5-2)(5-3)\cdots(5-9)(5-10) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = -14400. \end{aligned}$$

该序列的前几项为:

$$\begin{aligned} &4,\ -36,\ 576,\ -14400,\ 518400,\ -25401600,\ 1625702400, \\ &-131681894400,\ 13168189440000,\ -1593350922240000, \\ &229442532802560000,\ -38775788043632640000, \\ &7600054456551997440000,\ -1710012252724199424000000,\ \cdots \end{aligned}$$

(2) 当$k = 2$时:

(a) 当n为奇数时, 有

$$!n!_2 = \prod_{\substack{0<|n-2i|\leq n \\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots}} (n - 2i) = n(n-2)(n-4)\cdots(3)(1)$$

$$\begin{aligned} & (-1)(-3)\cdots(-n+4)(-n+2)(-n) \\ = \ & (-1)^{\frac{(n+1)}{2}}(n!!)^2. \end{aligned}$$

(b) 当n为偶数时, 有

$$\begin{aligned} !n!_2 \ = & \prod_{\substack{0<|n-2i|\le n \\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots}} (n-2i) = n(n-2)(n-4)\cdots(4)(2) \\ & (-2)(-4)\cdots(-n+4)(-n+2)(-n) \\ = \ & (-1)^{\frac{n}{2}}(n!!)^2. \end{aligned}$$

因此, $!3!_2 = 3(3-2)(3-4)(3-6) = 9$, $!4!_2 = 4(4-2)(4-6)(4-8) = 64$. 该序列的前几项为:

$$9,\ 64,\ -225,\ -2304,\ 11025,\ 147456,\ -893025,$$
$$-14745600,\ 108056025,\ 2123366400,\cdots$$

(3) 当$k = 3$时:

$$!n!_3 = \prod_{\substack{0<|n-3i|\le n \\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots}} (n-3i) = n(n-3)(n-6)\cdots$$

因此, $!7!_3 = 7(7-3)(7-6)(7-9)(7-12) = 7(4)(1)(-2)(-5) = 280$. 该序列的前几项为:

$$-8,\ 40,\ 326,\ 280,\ -2240,\ -26244,\ -22400,$$
$$-246400,\ 3779136,\ 3203200,\ -44844800,\cdots$$

(4) 当$k = 4$时:

$$!n!_4 = \prod_{\substack{0<|n-4i|\le n \\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots}} (n-4i) = n(n-4)(n-8)\cdots$$

因此, $!9!_4 = 9(9-4)(9-8)(9-12)(9-16) = 9(5)(1)(-3)(-7) = 945$. 该序列的前几项为:

$$-15,\ 144,\ 105,\ 1024,\ 945,\ -14400,\ -10395,$$

$$-147456,\ -135135,\ 2822400,\ 2027025,\cdots$$

(5) 当$k=5$时:

$$!n!_5 = \prod_{\substack{0<|n-5i|\le n\\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots}} (n-5i) = n(n-5)(n-10)\cdots$$

因此,

$$\begin{aligned} !11!_5 &= 11(11-5)(11-10)(11-15)(11-20) \\ &= 11(6)(1)(-4)(-9) = 2376. \end{aligned}$$

该序列的前几项为:

$$\begin{aligned} &-24,\ -42,\ 336,\ 216,\ 2500,\ 2376,\ 4032, \\ &-52416,\ -33264,\ -562500,\ -532224, \\ &-891072,\ 16039296,\cdots \end{aligned}$$

一般地, 对任意正整数n, k, 设$n>k\ge 1$, Smarandacheials定义为:

$$!n!m_k = \prod_{\substack{0<|n-k\cdot i|\le m\\ i=0,\ 1,\ 2,\cdots}} (n-k\cdot i)$$

例如:

$$!7!3_2 = (7-4)(7-6)(7-8)(7-10) = (3)(1)(-1)(-3) = 9.$$

$$\begin{aligned} !7!9_2 &= 7(7-2)(7-4)(7-6)(7-8) \\ &\quad (7-10)(7-12)(7-14)(7-16) \\ &= 7(5)(3)(1)(-1)(-3)(-5)(-7)(-9) \\ &= -99225. \end{aligned}$$

11.6 Smarandache的计算机汇编

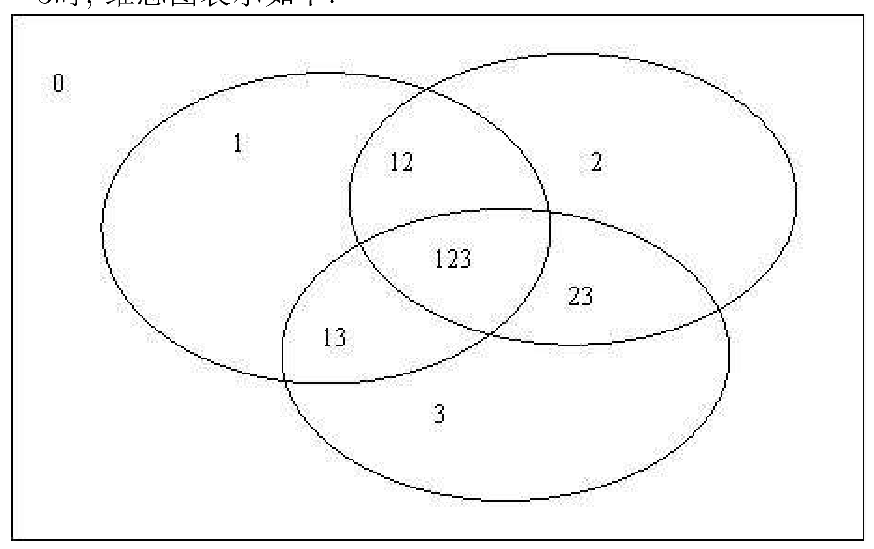
当集合的个数增加时, 维恩图很难描绘和解读集合的关系. Smarandache教授建议用代数法表示集合相交.

设$n \geq 2$表示集合$S_1, S_2, \cdots S_n$的个数, 这些集合在维恩图中以所有可能的方式相交.

设$1 \leq k \leq n$, Smarandache教授指出: 数$i_1 i_2 \cdots i_k$表示维恩图中集合$S_{i_1}, S_{i_2}, \cdots, S_{i_k}$的公共部分. 所有集合的外部(即就是, 所有集合的并的补)记为0.

每个维恩图都有2^n个不相交部分, 即为数$12 \cdots n$的各位数中k个数字的组合.

当$n = 3$时, 维恩图表示如下:



11.7 Smarandache思想、重空间及几何

一个公设系统Ξ称为*Smarandache*否定的, 若其中存在一个公设, 在Ξ中同时表现出成立或不成立, 或至少以两种以上方式表现不成立. 这样的系统称为*Smarandache*系统. Smarandache思想的核心就是构造并研究这种数学系统, 进而实现人类对物质世界的理解. 实际上, Smarandache 思想是中国先古哲人老子思想的一种特殊情形.

一个含有Smarandache否定公设的拓扑空间称为*Smarandache*几何, 特别地, 对任意整数$n \geq 2$, 有*Smarandache* n-流形的概念. L.F.Mao给出了一般性构造Smarandache n-流形的方法(参见文献[57]和[58]), L.F.Mao构造的2-维Smarandache流形又称为地图几何.

一般性地构造*Smarandache*系统可以采用数学组合的方法, 即给定不同系统之间一个组合结构, 进而得到Smarandache系统, 特别地, 可以采用*Smarandache*重空间的方法, 即给定n个两两不同的拓扑或度量空间A_1, $A_2, \cdots, A_n$, 定义一个n-重空间为

$$\sum = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

这样的重空间大量存在, 例如, 利用经典数学中的群、环、域和向量空间, 构造重群、重环、重域和重向量空间, 利用组合思想构造组合流形并研究其上的微分结构, 进而产生组合, 微分几何等. 更多信息(参见文献[59]).

参考文献

[1] F.Mark, M.Patrick. Bounding the Smarandache function. Smarandache notions journal, 13(2002), No.1-2-3.

[2] Tom M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.

[3] 张文鹏等, 初等数论, 陕西师范大学出版社, 西安, 2007.

[4] A. Murthy, Some notions on least common multiples, Smarandache Notions Journal, 12(2001), No.1-2-3, 307-309.

[5] Zhang Wenpeng, Liu Duansen, On the primitive numbers of power p and asymptotic property, Smarandache Notions Journal, 13(2002), No.1-2-3, 173-175.

[6] Mark Farris and Patrick Mitchell, Bounding the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, 13 (2002), No.1-2-3, 37-42.

[7] 潘承洞, 潘承彪, 解析数论基础, 科学出版社, 北京, 1999, 202-205.

[8] 潘承洞, 潘承彪, 素数定理的初等证明, 上海科学技术出版社, 上海, 1988.

[9] Kenichiro Kashihara, Comments and topics on Smarandache notions and problems, Erhus University Press, USA, 1996.

[10] C. Ashbacher, On numbers that are pseudo-Smarandache and Smarandache perfect, Smarandache Notions Journal, 15(2004), No.1-2-3, 40-42.

[11] Xu Zhefeng, On the Value Distribution of the Smarandache Function, Acta Mathematica Sinica (in Chinese), 49(2006), No.5, 1009-1012.

[12] S. Tabirca, About S-multiplicative functions, Octogon, 1999, 169-170.

[13] P.Erdös, Problem 6674, Amer. Math. Monthly, 98(1991), 965.

[14] A. Murthy, Generalized Partitions and New Ideas On Number Theory and Smarandache Sequences, Hexis, 2005, 20-22.

[15] D. R. Heath-Brown, The differences between consecutive primes. III, Journal, London Math. Soc., 20(1979), No.2, 177-178.

[16] H. N. Shapiro, Introduction to theory of numbers, John Wiley and Sons, 1983, 181.

[17] 《数学手册》编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 北京, 1977, 25.

[18] Wang Xiaoying, On the Smarandache Pseudo-multiples of 5 sequence, Research on Smarandache Problems in Number theory, Hexis, 2004, 17-19.

[19] 华罗庚, 数论导引, 科学出版社, 北京, 1975, 105.

[20] Liang F. C. and Yi Y, The primitive number of power p and its asymptotic property, Research on Smarandache problems in number theory, Hexis, Phoenix, 2004, 129-131.

[21] C. Ashbacher, Some Properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions, Mathematics and Informatics Quarterly, 7(1997): 114-116.

[22] Liu Yaming, On the solutions of an equation involving the Smarandache function, Scientia Magna, 2(2006), No. 1, 76-79.

[23] Fu Jing, An equation involving the Smarandache function, Scientia Magna,

2(2006), No. 4, 83-86.
[24] F. Smarandache, Only Problems, Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.
[25] C. Ashbacher, On numbers that are pseudo-Smarandache and Smarandache perfect, Smarandache Notions Journal, 15(2004), No.1-2-3, 40-42.
[26] Yi Yuan, On the primitive numbers of power p and its asymptotic property, Scientia Magna, 1(2005), No. 1, 175-177.
[27] A., Begay, Smarandache Ceil Functions, Bulletin of Pure and Applied Sciences, 1997, 16E: 227-229.
[28] G. H. Hardy, E M.Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ Press, Oxford, 1981.
[29] Ma Jinping, The Smarandache Multiplicative Function, Scientia Magna, 1(2005), No.1, 125-128.
[30] Li Hailong and Zhao Xiaopeng, On the Smarandache function and the K-th roots of a positive integer, Research on Smarandache problems in number theory, Hexis, 2004, 119-122.
[31] Xue Shejiao, On the Smarandache dual function, Scientia Magna, 3(2007), No.1, 29-32.
[32] Le Maohua, A conjecture concerning the Smarandache dual function, Smarandache Notions Journal, 14(2004), No.1-2-3, 153-155.
[33] Li Jie, On Smarandache dual functions, Scientia Magna, 2(2006), No.1, 111-113.
[34] Lv Zhongtian, On the F.Smarandache LCM function and its mean value, Scientia Magna, 3(2007), No.1, 22-25.
[35] Xu Zhefeng, Some new arithmetical functions and their mean value formulas, Mathematics in Practice and Theory (in Chinese), 36(2006), No.8, 300-303.
[36] Jozsef Sandor, On certain inequalities involving the Smarandache function, Scientia Magna, 2(2006), No.3, 78-80.
[37] Chen Rongji, On the functional equation $S(n)^r + S(n)^{r-1} + \cdots + S(n) = n$, Smaraandache Notions Journal, 11(2000), No.1-2-3, 128-130.
[38] Charles Ashbacher, Unsolved Problems, Smaraandache Notions Journal, 9 (1998), No.1-2-3, 152-155.
[39] A. Murthy, Smarandache reciprocal function and an elementary inequality, Smarandache Notions Journal, 11 (2000), No.1-2-3, 312-315.
[40] Pan Chengdong and Pan Chengbiao, Goldbach Conjecture, Science Press, Beijing, 1992.
[41] I. Balacenoiu and V. Seleacu, History of the Smarandache function, Smarandache Notions Journal, 10(1999), No.1-2-3, 192-201.
[42] Wang Yongxing, On the Smarandache function. Research on Smarandache Problem in Number Theory (Edited by Zhang Wenpeng, Li Junzhuang and Liu Duansen). Hexis, II(2005), 103-106.
[43] F. Smarandache, Sequences of numbers involving in unsolved problem, Hexis, 2006, 17-18.
[44] M. L. Perez, Florentin Smarandache, Definitions, solved and unsolved problems,

conjectures and theorems in number theory and geometry, Xiquan Publishing House, 2000.

[45] F. Smarandache, Collected papers, Vol.III, Bucharest, Tempus Publ.Hse., 1998.

[46] Xu Zhefeng, On the mean value of the Smarandache power function, Acta Mathematica Sinica (Chinese series), 49(2006), No.1, 77-80.

[47] Zhou Huanqin, An infinite series involving the Smarandache power function $SP(n)$, Scientia Magna, 2(2006), No.3, 109-112.

[48] F. Russo, A set of new Smarandache functions, sequences and conjectures in number theory, American Research Press, USA, 2000.

[49] Pan C. D. and Pan C. B., Elementary Number Theory, Beijing University Press, 2003.

[50] Jozsef Sandor, On a dual of the Pseudo-Smarandache function, Smarandache Notions (Book series), 13(2002), No.1-2-3, 16-23.

[51] Le Maohua, Two function equations, Smarandache Notions Journal, 14(2004), No.1-2-3, 180-182.

[52] David Gorski, The pseudo-Smarandache functions, Smarandache Notions Journal, 12(2000), No.1-2-3, 140-145.

[53] Jozsef Sandor, On additive analogues of certain arithmetic function, Smarandache Notions Journal, 14(2004), No.1-2-3, 128-132.

[54] Chen Jianbin, The equations involving the F.Smarandache multiplicative function, Scientia Magana, 3(2007), No.2, 60-65.

[55] Tian Chengliang, Two equation involving the Smarandache LCM dual function, Scientia Magana, 3(2007), No.2, 80-85.

[56] Jozsef Sandor, On A Conjecture of Smarandache on Prime Numbers, Smarandache Notions Journal, 10(2000), No.1-2-3.

[57] Mao Linfan, Selected Papers on Mathematical Combinatorics, World Academic Union, 2006, 49-74.

[58] Mao Linfan, International J.Math. Combin, 1(2007), No.1, 45-58.

[59] http://www.gallup.unm.edu/˜/ eBooks-otherformats.htm.

Smarandache Unsolved Problems and New Progress

Liu Yanni

Department of Mathematics,

Nowthwest University,

Xi'an, Shaanxi, 710127, P. R. China.

Li Ling

Department of Basic Course,

Shaanxi Polytechnic Institute,

Xianyang, Shaanxi, 712000, P. R. China.

Liu Baoli

Department of Basic Course,

Xi'an Aeronautical Polytechnic Institute,

Yanliang, Shaanxi, 710089, P. R. China.

High American Press

2008

责任编辑：张 沛

封面设计：高 鹏

本书主要将目前国内外学者关于Smarandache问题的部分研究成果以及提出的未解决问题汇编成册，其主要目的在于向读者全面又系统的介绍一些与数论研究有关的Smarandache问题的研究现状，包括数论函数的均值、恒等式与不等式、无穷级数、特殊函数方程的解等一系列问题，并提出了关于这些函数的一些未解决的新问题，希望有兴趣的读者可以对这些问题进行研究，从而开拓读者的视野，引导和激发读者对这些领域的研究兴趣。

This book will mainly make part of the research results of current domestic and foreign scholars on Smarandache problems and unsolved problems into a book, its main purpose is to introduce some of the research of Smarandache problems to readers comprehensively and systematically, Including the mean value of arithmetic functions, identities and inequalities, infinite series, the solutions of special equations, and put forward to some new interesting problems. We hope that the readers could be interested in these issues. At the same time, this book could open up the reader's perspective, guide and inspire the readers to these fields.


ISBN 1-59973-063-4
53995>
9 781599 730639